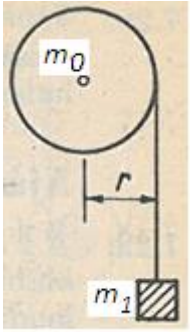


8-Forgó mozgás



.M1) Az r sugarú, m_0 tömegű, tömör henger súrlódásmentes csapágyban vízszintes tengely körül foroghat. A hengerre elhanyagolható tömegű fonalat csavarunk, melynek szabad végére m_1 tömegű testet függesztünk.

a.) Mekkora a henger szöggyorsulása, a lógó tömeg gyorsulása, a kötél erő, a csigát tengelyét tartó

erő? $[\beta = \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2}m_0} \frac{g}{r}; \quad a = \frac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2}m_0} g; \quad K = \frac{\frac{1}{2}m_0}{m_1 + \frac{1}{2}m_0} m_1 g; \quad T = \frac{3m_1 + m_0}{2m_1 + m_0} m_0 g]$

b.) Mi történik, ha m_0 egyre kisebb lesz? ($a \rightarrow g$)

c.) Mekkora legyen a tömegarány, hogy $g/2$ legyen a süllyedő test gyorsulása? ($2m_1 = m_0$)

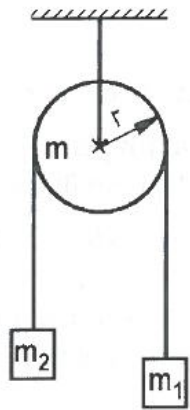
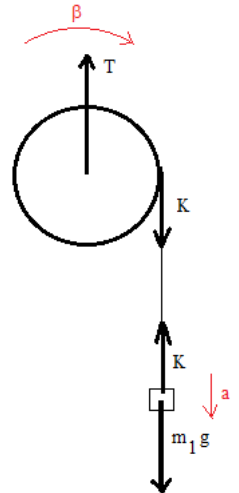
Három ismeretlenre (β , a , K) három egyenlet adódik:

$$\begin{cases} m_1 g - K = m_1 a \\ Kr = \theta \beta \\ a = r \beta \end{cases}$$

(Dinamika alapegyenlete a testre, forgó mozgás alapegyenlete a csigára, kényszerfeltétel a és β között, mely a fonálnak a csigán való meg nem csúszását fejezi ki.)

(A gyorsulás és a szöggyorsulás felvett pozitív irányait egyeztessük.)

A T erő a csigára felírt $\Sigma F=0$ -ból adódik.



.2) a.) Mekkora a testek gyorsulása? ($a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$)

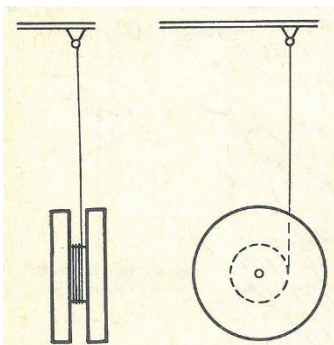
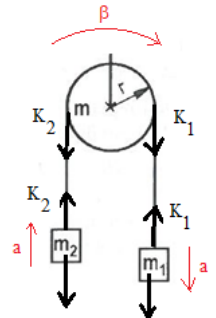
b.) Mi történik, ha m egyre kisebb lesz? ($a \rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$)

c.) Legyen $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m = 4$ kg? ($a = -g/5$, a felvett iránnyal ellentétes)

4 ismeretlenre (kötél erők, a , β) négy egyenlet:

$$\begin{aligned} m_1 g - K_1 &= m_1 a \\ K_2 - m_2 g &= m_2 a \\ K_1 r - K_2 r &= \theta \beta \\ a &= r \beta \end{aligned}$$

A forgó mozgás alapegyenletét a középponton átmenő, nyugvó tengelyre írtuk fel, így a tehetetlenségi nyomatékot is erre a tengelyre számítjuk: $\theta = \frac{1}{2} m r^2$.



.M3) A „jojó” a fonalon lecsavarodik. A fonál r sugarú hengerről csavarodik le, melynek tömege elhanyagolható. a nagy tárcsák együttes tömege m , sugaruk R .

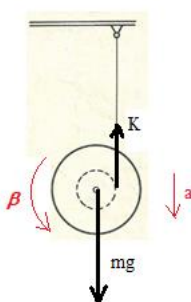
a.) Írjuk le a jojó mozgását, és határozzuk meg a fonalat feszítő erőt!

$$\left[a = \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{R}{r})^2 + 1} g; \quad K = \frac{\frac{1}{2}(\frac{R}{r})^2}{\frac{1}{2}(\frac{R}{r})^2 + 1} m g \right]$$

b.) Vizsgáljuk Legyen $R \gg r$ esetét ($a, \beta \rightarrow 0$; $K \rightarrow mg$)

c.) Figyeljük meg, mit csinál a jojó a legfelső pontban: Felfelé haladva a tengelyének állása nem változik, a felső holtpontra tengelye vízszintes síkban megpördül, majd

lefelé indulva ismét azonos marad a tengelyállás. Miért? (p.m.)



a.-b.) 3 ismeretlenre (K , a , β) három egyenlet:

$$\begin{aligned} mg - K &= ma \\ Kr &= \theta_{TKP} \beta \\ a &= r \beta, \end{aligned}$$

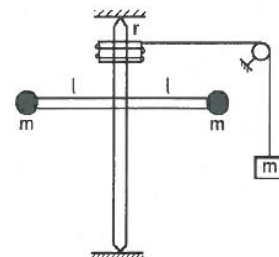
ahol $\theta_{TKP} = \frac{1}{2} m R^2$.

A harmadik egyenlet azt fejezi ki, hogy a kicsi henger csúszás nélkül gördül le a függőlegesnek tekintett (jó közelítés, ha r elhanyagolható a függőlegesítő fonál hosszához képest) fonalon.

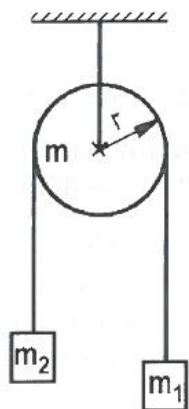
.c) A forgó jojó perdületéhez tartozó tengelyállás megmarad (a kötélerő kezdeti tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka csak a perdület nagyságát változtatja, az irányát nem (ehhez vízszintes síkban ható erő lenne szükséges). A fonál viszont a mozgás előtti felcsavaráskor általában megtekeredik. A felső holtpontra a perdület 0-vá válik, a megtekeredett fonál (torziós ingaként) kicsavarodik, hiszen a perdület az eddigi forgástengelyre számítva 0, iránya (tetszőleges!) szerinti állandósága ezt most nem akadályozza meg.

Megjegyzés: Nagy a csábítás, hogy a forgó mozgás alapegyenletét ne a korong TKP-jára, hanem a kötéllal érintkező P pontra írjuk fel. **Vigyázat! A forgó mozgás alapegyenlete inerciarendszerben gyorsuló tengelyre általában nem igaz!** Vannak azonban kivételek. Ez az eset is az. Hogy ez miért kivétel, azt a következő fejezetben láthatjuk! Ha most a P-ponton átmenő tengelyt használjuk, akkor a $mgr = \theta_P \beta$ egyenletet nyerjük, ahol a P-ponton átmenő tengelyre: $\theta_P = \theta_{TKP} + mr^2$ a Steiner-tétel szerint. Az így kapott egyenlet ekvivalens az eredetileg felírttal. Ellenőrizzük!

.4) Az ábrán vázolt elrendezésben a zsinór, a vízszintes rúd, a tengely a forgódobbal, valamint a csiga elhanyagolható tömegűek. A tengelyen fellépő súrlódástól eltekintünk. Mekkora gyorsulással sülyed a zsinór végére akasztott test? $\left(\frac{g \cdot r^2}{2l^2 + r^2}\right)$



A kötélerő forgatja a csigát: $Kr = \theta \beta$, ahol $\theta = 2ml^2$, és lassítja a lógó testet: $mg - K = ma$. Eközben $a = r\beta$, mert a fonál nem csúszik.



.5) 0,5 m sugarú, 26 kg tömegű tömör hengeren átvett fonal végein testek lógnak, amelyeknek együttes tömege 12 kg. A testeket elengedve a henger $3,2 \frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással indul el. A köté a hengeren nem csúszik meg, a tömör henger tehetetlenségi nyomatéka $0,5 \text{ mr}^2$.

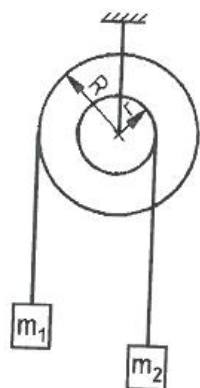
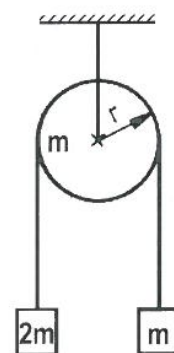
a) Mekkora a két test tömege külön-külön? **(4 kg; 8 kg)**

b) Az indulástól számított 3 s múlva mennyi az összes mozgási energia? **(288 J)**

Speciális esete a 2. feladatnak. (Erők rajza, 4 egyenlet, 4 ismeretlen). $3,2 \frac{m}{s^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$
alapján $m_1 - m_2 = 4 \text{ kg}$.

.6) Mekkora a rendszerben a hasábok gyorsulása és mekkora erő hat a mennyezetre? A fonál nem nyúlik, tömege elhanyagolható és a csigán nem csúszik meg. $(a = \frac{2}{7} g; K = \frac{26}{7} mg)$

Speciális esete a 2. feladatnak. 4 egyenlet, 4 ismeretlen (a, β, K_1, K_2) .
Majd a tartóerő $T = K_1 + K_2 + mg$.



.7) R sugarú, m tömegű korong kerületére csavart fonal szabad végére m_1 , a koronghoz erősített elhanyagolható tömegű r sugarú tárcsa kerületére csavart fonal végére m_2 tömegű testet helyeztünk.

a) Mekkora a testek gyorsulása, és mekkora erők feszítik a fonalat ha $m_1 = m_2 = m$, és $R = 2r$?

$$(a_1 = \frac{2}{7} g; a_2 = \frac{1}{7} g; K_1 = \frac{5}{7} mg; K_2 = \frac{8}{7} mg)$$

b) Legyen $R=3r$ és $m=m_1$. Mekkora legyen az m_2 tömeg, hogy a bal oldali m_1 -es tömeg *felfelé* g gyorsulással gyorsuljon? **($m_2=11,25 m$)**

Felvéve az a_1 gyorsulást lefelé, az a_2 -t pedig felfelé, a szöggyorsulást pozitív irányba, 5 egyenlet adódik az 5 ismeretlenre $(a_1, a_2, \beta, K_1, K_2)$:

$$m_1 g - K_1 = m_1 a_1$$

$$K_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

$$K_1 R - K_2 r = \frac{1}{2} m R^2 \beta$$

$$a_1 = R\beta$$

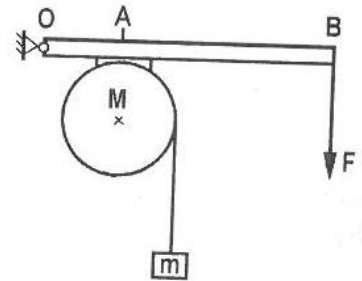
$$a_2 = r\beta.$$

$$\text{Adódik pl.: } a_1 = \frac{(m_1 R - m_2 r) R}{\frac{1}{2} m R^2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} g.$$

.8) Az $M = 60 \text{ kg}$ tömegű tömör henger vízszintes tengelyen foroghat. A hengerre csavart fonalon $m = 50 \text{ kg}$ tömegű teher lóg. A henger forgását a hozzászorított $\overline{OB}$ emelőrúddal fékezzük, ahol a súrlódási együttható $0,25$. Az emelőrúd végét $F = 400 \text{ N}$ erővel szorítjuk le. $\overline{OB} = 3 \overline{OA}$.

a.) Mekkora gyorsulással süllyed az m tömegű test? (**$2,5 \text{ m/s}^2$**)

b.) A helyzeti energiaváltozás hány százalékából lesz mechanikai (mozgási) energia? (**40%**)



Az összenyomó erő $3F$, ami $S=300 \text{ N}$ lassító súrlódási erőt indukál a kerület mentén.

Három egyenlet a 3 ismeretlenre (K, a, β):

$$mg - K = ma$$

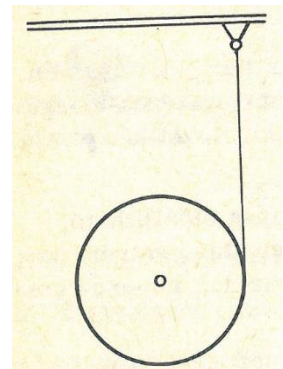
$$Kr - Sr = \theta_{TKP} \beta$$

$$a = r\beta.$$

.9) Az R sugarú, m tömegű korong kerületére csavart fonál végét rögzítjük, majd a korongot elengedjük.

a.) Írjuk le a korong mozgását! (**$a = 2g/3$; $K = mg/3$**)

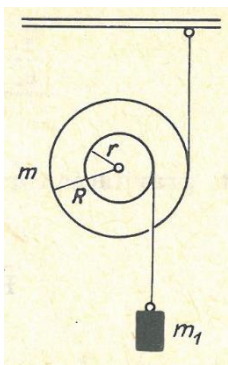
b.) Mekkora a korong szögsebessége és középpontjának v sebessége, ha a korong kezdősebessége nélkül indult és mozgása során a korongról l hosszúságú fonáldarab csavarodott le? (**$v = \sqrt{\frac{4}{3}lg}$**)



a.) Speciális esete az M3 „jojó”-s példának.

b.) A letekeredő fonál: $l = 1/2 at^2$, amiből adódik t . Ezzel $v = at$ és $\omega = \beta t$.

Avagy: A helyzeti energia mozgásivá alakul: $mg l = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \theta \omega^2$, és fennáll a $v = \omega r$ kényszer.



.10) R sugarú, m tömegű korong kerületére csavart fonál szabad végét felfüggesztjük. A koronghoz erősített elhanyagolható tömegű r sugarú tárcsa kerületére csavart fonál végére m_1 tömegű testet függesztünk (mindkét fonál a korong középpontjának ugyanazon oldalán van). A rendszer függőleges síkban mozoghat.

a.) Írjuk le a rendszer mozgását, ha $R = 2r$, $m = 4m_1$. [**$A = \frac{18}{25}g$ és $a = \frac{9}{25}g$**]

b.) Lehetséges-e olyan tömegarányt és sugárárányt választani, hogy a henger a kótélen felfelé gyorsuljon? (**nem**)

c.) Mekkora a henger gyorsulása $R=2r$ esetén, ha m_1 sokkal nagyobb m -nél? (**$A \rightarrow 2g$**)

a.) Az egyenletrendszer (a, A, β, T, K):

$$mg + K - T = mA$$

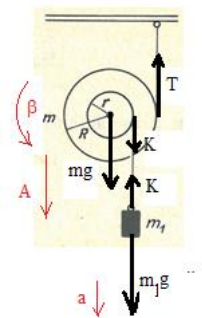
$$m_1 g - K = m_1 a$$

$$TR - Kr = \theta_{TKP} \beta$$

$$A = R\beta$$

$$a = A - r\beta.$$

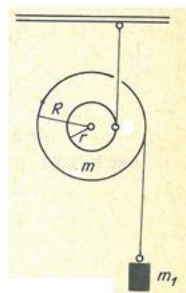
A 4. egyenlet azt fejezi ki, hogy az R sugarú henger csúszva gördül a felfüggesztő kótélen (az érintkezési pont gyorsulása IR -ben 0), míg az 5. egyenlet kifejezi, hogy a függő test IR -beli a gyorsulása az forgómozgásból adódó érintő irányú gyorsulás és a TKP IR -beli gyorsulásának összege $\vec{a}_{függő(IR)} = \vec{a}_{függő(TKP)} + \vec{a}_{TKP(IR)}$.



Könnyebb megoldani az egyenletrendszer, ha rögtön elvégezzük a feltételnek megfelelő helyettesítéseket: $R = 2r$, $m = 4m_1$ feltételekkel: $\beta = \frac{9}{25} \frac{g}{r}$; $A = \frac{18}{25} g$ és $a = \frac{9}{25} g$
A henger és a lógó test is lefelé gyorsul, mert A és a pozitívnak adódik.

.b) Általános megoldása: $\beta = \frac{(m_1+m)R-m_1r}{3mR^2+2m_1(R-r)^2} \cdot 2g$; $A = \frac{(m_1+m)R-m_1r}{3mR^2+2m_1(R-r)^2} \cdot 2gR$. A felfelé gyorsuló henger esetének $A < 0$ felelne meg. Ez nem valósulhat meg $m > 0$ és $R \geq r$ miatt.

.c) A számlálóban m elhanyagolható m_1 mellett.



.11) Az R sugarú m tömegű koronghoz erősített elhanyagolható tömegű, r sugarú tárcsa kerületére csavart fonalat felfüggesztjük. A korong kerületére csavart másik fonál végére m_1 tömegű testet fűggesztünk. Mindkét fonál a korong középpontjának ugyanazon oldalán van.

Mekkora a henger és a lógó tömeg gyorsulása?

.a) Legyen: $R = 2r$ és $m_1 = 2m$, ($A = -g/5$; $a = g/5$, **a henger felfelé, a test lefelé gyorsul**)

.b) Legyen $R = 2r$ és $m_1 = \frac{1}{3}m$. ($A = g/5$; $a = -g/5$, **a henger lefelé, a test felfelé gyorsul**)

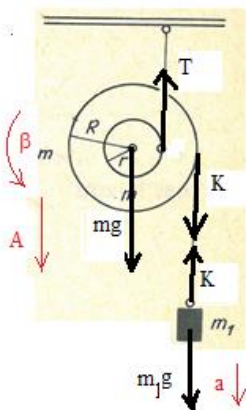
.c) Sanyi szerint ez a feladat ugyanúgy oldható meg, mint az előző, hiszen most a fonálerő karja és a kötélrő karja cserélődött fel, így csupán R és r értékeit kell felcserélni, hogy a mostani egyenleteket

megkapjuk.

Emiatt az előző feladat megoldásainál is csak R és r felcserélését kell elvégezni, tehát a mostani megoldás:

$$\beta = \frac{(m_1+m)r-m_1R}{3mr^2+2m_1(r-R)^2} \cdot 2g; \quad A = \frac{(m_1+m)r-m_1R}{3mr^2+2m_1(r-R)^2} \cdot 2gr.$$

Ezen általános megoldás képleteibe helyettesítve azonban sehogy sem jönnek neki ki azok az eredmények, amiket az .a) és .b) feladatban kaptunk. Vajon mi a hiba gondolatmenetében?



.a)-.b) Az egyenletek általánosan:

$$mg + K - T = mA$$

$$m_1g - K = m_1a$$

$$Tr - KR = \theta_{TKP} \beta$$

$$A = r\beta$$

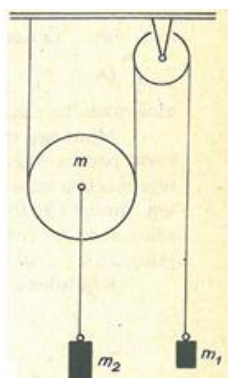
$$a = A - R\beta.$$

Könnyebb megoldani őket, ha rögtön felhasználjuk a feltételeket.

A megoldásuk általában:

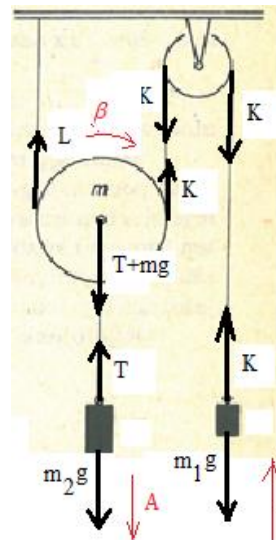
$$\beta = \frac{(m_1+m)r-m_1R}{mR^2+2mr^2+2m_1(r-R)^2} \cdot 2g; \quad A = \frac{(m_1+m)r-m_1R}{mR^2+2mr^2+2m_1(r-R)^2} \cdot 2gr. \text{ Ezekből is adódik .a) és .b) eredménye.}$$

.c) Az egyenletekben valóban csak R és r cseréjét kell elvégezni. DE! a 3. egyenletben $\theta_{TKP} = \frac{1}{2}mR^2$ -et kell használni *mindkét* esetben! Itt nem lehet R -t kicserélni r -re. Amikor Sanyi az előző feladat megoldásában is elvégezte a cserét, akkor ezt a hibát követte el, hiszen az előző megoldásba már be van építve $\theta_{TKP} = \frac{1}{2}mR^2$, ezért innentől nem érvényes a „csupán cserélni kell” elv. Ha az *előző* feladat eredményét $\beta = \frac{(m_1+m)R-m_1r}{2\theta+2mR^2+2m_1(R-r)^2} \cdot 2g$ ill. $A = \frac{(m_1+m)R-m_1r}{2\theta+2mR^2+2m_1(R-r)^2} \cdot 2gR$ módon adtuk volna meg, akkor Sanyi gondolatmenete helyes lenne, és „csere” helyes eredményt is adna (θ mindkétszer ugyanaz).



.12) Mozgócsiga függőleges síkban mozoghat. A függesztő fonál szabad végét állócsigán vezetjük keresztül és fonál végére m_1 tömegű testet fűggesztünk. Az m tömegű, R sugarú mozgócsigára m_2 tömegű terhet fűggesztünk. (Az állócsiga és a fonál tömegétől eltekintünk, a fonálszakaszok mind függőlegesek, a fonál a csigán nem csúszik.) Írjuk le a rendszer mozgását és adjuk meg a fonál egyes szakaszait terhelő erőket! Legyen $m_1 = 7$ kg, $m_2 = 6$ kg, $m = 4$ kg. ($a_1 = 2$ m/s² lefelé, $a_2 = 1$ m/s² felfelé. Kötélrők: 56 N, 66 N, 54 N)

A gyorsulások pozitív irányának felvételében támpontot adhat, hogy egyensúlyban a mozgócsiga terhét fele akkora erővel tarthatjuk meg mint a teher súlya (most az m_1 *lefelé* húzza a rendszert). Nem baj azonban, ha előre nem látjuk a majdani gyorsulás irányait, ilyenkor a pozitív irányok felvétele tetszőleges. (Most pl. *felfelé* vesszük pozitívnek az m_1 gyorsulását). Az állócsigának elhanyagolható a tömege, a szöggyorsításához nem kell forgatónyomaték, ezért a két oldalán a kötélerők egyenlők (ellentétben a tömeggel rendelkező mozgócsigával).



6 ismeretlenre (β , A , a , K , L , T .) 6 egyenlet:

$$K - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 A$$

$$T + mg - K - L = m A \quad \text{a dinamika alapegyenletei a felvett gyorsulásoknak megfelelően,}$$

$$(L - K)R = \theta \beta \quad \text{a forgó mozgás alapegyenlete a TKP-n átmenő tengelyre a}$$

$$\text{felvett } \beta\text{-nak megfelelően,}$$

$$A = R\beta$$

$$a = A + R\beta \quad \text{a kényszerek. } (\theta = \frac{1}{2} m R^2).$$

$$\text{A megoldás: } \beta = \frac{-2m_1 + m + m_2}{4m_1 + \frac{3}{2}m + m_2} \cdot \frac{g}{R}, \quad A = \frac{-2m_1 + m + m_2}{4m_1 + \frac{3}{2}m + m_2} \cdot g.$$

$$\text{Adatainkkal: } \beta = -0,1 \frac{g}{R}; \quad A = -1 \frac{m}{s^2}; \quad a = -2 \frac{m}{s^2}; \quad K = 56 \text{ N} \quad T = 66 \text{ N} \quad L = 54 \text{ N}.$$

A gyorsulások és a szöggyorsulás *negatív előjele miatt* az általunk eredetileg felvett irányokkal *ellentétesen!*

.M13) Az r sugarú, m tömegű, tömör hengert a tengelyre kötött fonál segítségével F erővel húzzuk? Mekkora a gyorsulása, szöggyorsulása, és a fellépő súrlódási erő?

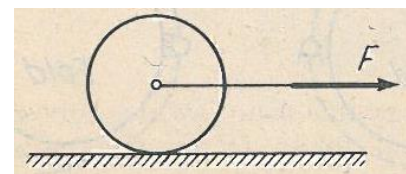
.a) Nincs súrlódás. ($F/m; 0; 0$)

.b) Van súrlódás, de tisztán gördül. $\left[\frac{2}{3} \frac{F}{m}; \frac{2}{3} \frac{F}{mr}; \frac{1}{3} F \right]$

.c) Legfeljebb mekkora lehet az F húzóerő, hogy a talajon ne csússzon meg? ($3\mu_0 mg$)

.d) Mi történik $F=4\mu_0 mg$ esetén? (**csúszik**, $a = 3\mu g$; $\beta = 2\mu g/r$)

.e) Pontosan számoljuk ki minden egyes ható erő munkáját, és ellenőrizzük a munkatételt, miközben a tengely s úton gördülve elmozdul. Mi a szerepe az energiaátalakulások során a súrlódási erőnek, ha a henger nem csúszik meg?



.a) Nincs súrlódási erő, ezért nincs szöggyorsulás, csupán F erő gyorsít.

.b) A tiszta gördülés miatt szöggyorsulnia kell, amit hátrafelé mutató tapadási súrlódási erő okoz.

3 egyenlet: $F - S = ma$, $Sr = \theta_{TKP} \beta$, és $a = r\beta$.

.c) A tapadási súrlódási erőnek van maximuma!

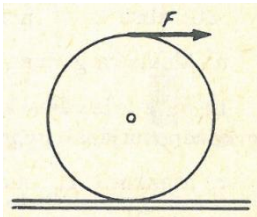
.d) Tudjuk S -et, és nincs a tiszta gördülésből adódó kényszerfeltétel a és β között.

.e) A nehézségi és tartóerő munkája 0, a húzóerőé Fs . A súrlódási erő *lassít*, és *forгат*, összmunkája így $-Ss + Si$, ahol i aza az ívhosszúság, melyet a tengelyhez képesti forgómozgás során a talajjal kezdetben érintkező pont befut, mialatt a TKP s távolsággal halad előre.

A mozgási energia két részből áll: $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \theta \omega^2$. A munkatétel mindig pontosan teljesül, akár tisztán gördül, akár csúszik.

Tiszta gördülésnél $i = s$, így a tapadási súrlódás összes munkája 0. A súrlódás (így forgás) nélküli esetben a húzóerő munkája a teljesen TKP mozgási energiájává alakulna. A tiszta gördülés során a súrlódási erő ezen TKP-i mozgási energia egy részét forgási energiává alakítja át, de az energiaösszege (a húzóerő munkáján) így nem változtat.

Csúszva gördüléskor $i < s$ (a forgás „lemarad” a TKP elmozdulásához képest), így a húzóerő munkájából a lassítással többet vesz el a súrlódási erő munkája, mint amennyit a forgatással hozzátesz. Így a húzóerő munkájánál kevesebb lesz az összenergia. A különbség disszipálódik (szétszóródik) a környezetbe (belső energiává alakul).



.M14) Legyen $R = 5 \text{ cm}$, $m = 1 \text{ kg}$, $\mu_0 = 0,3$.

- .a)** Legfeljebb mekkora vízszintes F erővel lehet húzni az m tömegű, R sugarú hengert az μ_0 tapadási súrlódási együtthatójú talajon, hogy ne csússzon meg? **(9 N)**
- .b)** Mekkora a tömegközéppont gyorsulása a maximális húzóerő esetén? **(12 m/s²)**
- .c)** Milyen módon nyilvánul meg a súrlódási erő hatása a tömegközéppont gyorsításánál?
- .d)** A mozgás során ható erők munkavégzését számoljuk ki, ellenőrizzük a munkatételt a mozgás

egy szakaszán!

.a-b) Vegyük fel az S súrlódási erőt hátrafelé (nem tudjuk, merre fog mutatni). Az egyenletek:

$$\begin{aligned} F - S &= ma \\ (F + S)R &= \theta_{TKP} \beta \\ a &= R\beta \end{aligned}$$

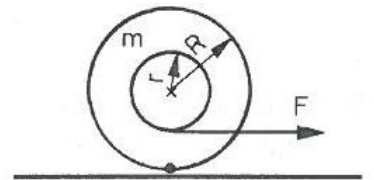
A megoldás: $a = \frac{F}{m} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\theta}{mR^2}}$ és $S = F \left(1 - \frac{2}{1 + \frac{\theta}{mR^2}} \right)$, ami henger esetén $a = \frac{F}{m} \cdot \frac{4}{3}$ és $S = -\frac{1}{3}F$. Tehát a súrlódási erő előre felé mutat, a henger pedig *nagyobb gyorsulással halad, mint ha nem lenne súrlódás!* A súrlódási erő gyorsítja TKP-ot, de lassítja a forgást!

A meg nem csúszás feltétele: $S \leq \mu mg$.

[Könnyen belátható (lett volna először is), hogy *a tapadási súrlódási erőnek előre kell mutatnia*: Ha nem lenne súrlódás, akkor az F erő okozna $a_{TKP} = \frac{F}{m}$ gyorsulást és $\beta = \frac{FR}{\theta_{TKP}}$ szöggyorsulást. Így a talajjal érintkező pont érintő irányú tengelyhez képesti gyorsulása $a_\epsilon = R\beta = F \frac{R^2}{\theta} = 2 \frac{F}{m}$ lenne hátrafelé. Ez nagyobb a tömegközépponti gyorsulásnál, így a kerék „kipörögne”, a talajhoz képest hátrafelé. Ezt akadályozza meg a tapadási súrlódás.

Mivel $\frac{mR^2}{\theta} \geq 1$ mindig fennáll, egyenlőség pedig csak vékonyfalú cső esetén lehetséges, ezért a súrlódási erő cső esetén nincs, egyébként mindig van és hátrafelé mutat.]

.15) Vízszintes asztallapon álló m tömegű koronghoz erősített elhanyagolható tömegű tárcsa kerületére csavart fonalat vízszintes irányban F erővel húzzuk, miközben tisztán gördül. A korong sugara R , a tárcsa sugara r . A fonalat a korong középpontja alatt húzzuk.



- .a)** Mekkora gyorsulással mozog a korong középpontja? **[$a = \frac{2}{3} \frac{F}{m} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$]**
- .b)** Mekkora a súrlódási erő? **[$S = \frac{F}{3} \left(1 + 2 \frac{r}{R} \right)$]**
- .c)** Legalább mekkora tapadási súrlódási együttható szükséges? **[$\mu_0 \geq \frac{F}{3mg} \left(1 + 2 \frac{r}{R} \right)$]**

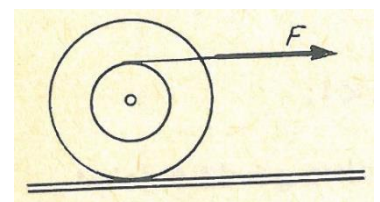
Hátrafelé felvéve a súrlódási erőt:

$$\begin{aligned} F - S &= ma \\ SR - Fr &= \theta_{TKP} \beta \\ a &= R\beta \end{aligned}$$

Mindig $S > 0$ lesz, a súrlódás mindig hátrafelé mutat.

.16) Ugyanaz a feladat, más elrendezésben!

- .a)** Mekkora gyorsulással mozog a korong középpontja? **[$a = \frac{2}{3} \frac{F}{m} \left(1 + \frac{r}{R} \right)$]**
- .b)** Mi a talaj és a korong között fellépő súrlódási erő szerepe a korong középpontjának gyorsításánál? **[$S = \frac{F}{3} \left(1 - 2 \frac{r}{R} \right)$]**
- .c)** Mekkora μ_0 súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy a korong a talajon csúszás nélkül gördülhessen? **[$\mu_0 \geq \frac{F}{3mg} \left| 1 - 2 \frac{r}{R} \right|$]**
- .d)** Mi történik $2r = R$ esetén?



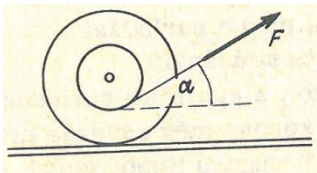
.a) Hátrafelé felvéve a súrlódási erőt:

$$\begin{aligned} F - S &= ma \\ SR + Fr &= \theta_{TKP} \beta \\ a &= R\beta. \end{aligned}$$

Ha az előző feladat egyenletrendszerében „r” helyére „-r”-t íránk, akkor a mostani feladat egyenletrendszerét kapnánk! Ezért az előző felat megoldásaiban is elvégezve ezt a cserét, a mostani megoldások adódnak.

.b) A súrlódási erő mutathat előre vagy hátra szerint, hogy r/R értéke $\frac{1}{2}$ alatt vagy felett van. A mostani képlet $r=0$ és $r=R$ esetén megadja az M13 és M14 feladat eredményeit.

.d) Bármekkora is lehet a súrlódási együttható, a tiszta gördülés létrejön úgy, hogy nincs szükség súrlódási erőre. mert az F erő gyorsító és forgató hatása egyedül tudja ezt biztosítani.



.17)

.a) Oldjuk meg a feladatot az általános esetben, ha a fonál a vízszintessel α szöget zár be, és a húzóerő nem túl nagy és az orsó nem csúszik a talajon! (A kicsi tárcsa tömege elhanyagolható, a két henegr sugara r és R .) Diszkutáljuk a megoldást α változtatásával.

$$\left[a = \frac{2}{3} \frac{F}{m} \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right); S = \frac{F}{3} \left(\cos \alpha + 2 \frac{r}{R} \right) \right]$$

.b) Végezzük el egy orsóval a fenti kísérletet. Próbálkozzunk kicsi és nagy szögekkel is. Próbáljuk a fonalat olyan irányba húzni, hogy az orsó nem gördüljön az asztalon! Figyeljük meg ez esetben, hogy a fonál iránya hol metszi az asztal síkját, majd ez alapján adjunk magyarázatot arra, miért nem gördül ilyenkor a henger!

.a) Az egyenletek tiszta gördülés esetén:

$$\begin{aligned} T + F \sin \alpha &= mg \\ F \cos \alpha - S &= ma \\ SR - Fr &= \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \beta \\ a &= R\beta. \end{aligned}$$

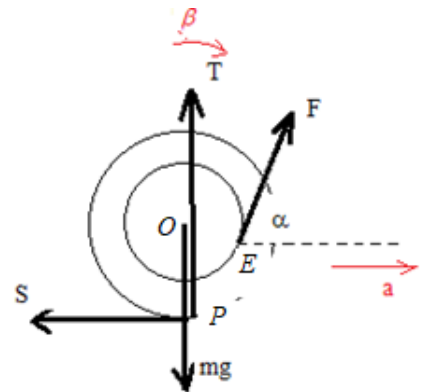
A megoldás:

$$a = \frac{2}{3} \frac{F}{m} \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)$$

$$S = \frac{F}{3} \left(\cos \alpha + 2 \frac{r}{R} \right)$$

$$T = mg - mg,$$

feltéve, hogy $T \geq 0$, hogy fel ne emelkedjen, és $S \leq T$, hogy meg ne csússzon. Ez utóbbi két feltétel miatt az F erőre két felső korlát is adódik: $F \leq \frac{mg}{\sin \alpha}$ illetve $F \leq \frac{3\mu_0}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha + 2 \frac{r}{R}} mg$. Ez utóbbiak most teljesülnek, mert F nem túl nagy.



A **súrlódási erő mindig balra**, a fonállal ellentrétes oldalra mutat.

- Amíg a fonál **α szöge olyan kicsi**, hogy $1 \geq \cos \alpha > \frac{r}{R}$, addig a henger jobbra, húzásirányba gördül, a fonál feltekeredik.
- Ha **α olyan nagy**, hogy $\frac{r}{R} > \cos \alpha \geq 0$, akkor a henger balra, a húzásiránnyal ellentétesen gördül, a fonál letekeredik.

.b) Ha **$\cos \alpha = \frac{r}{R}$** , akkor a henger nem gördül és nem gyorsul **kicsi** F erők esetén. Lassan növelve azonban ezen szög mellett a húzóerő nagyságát, az orsó gördülés nélkül megcsúszik. Ezen szög mellett az orsó „végigvonszolható” az asztalon anélkül, hogy a fonál fel- vagy letekeredne róla.

Mivel az S és F erők karjai a TKP-on átmenő tengelyre számítva $OP=R$ és $OE=r$, szögük pedig éppen α , továbbá fennáll a $\cos \alpha = \frac{r}{R}$ összefüggés, ezért az ábrán OEP szög éppen derékszög. Így F hatásvonala éppen a P érintkezési pontnál döfi az asztalt.

Avagy nézőpontváltással: Ha a P ponton átmenő, IR-ben álló (pillanatnyi) forgástengelyt tekintjük, akkor a rá érvényes $\Sigma M=0$ feltétel adja meg, mikor nem gördül a henger. Márpedig erre a tengelyre csakis az F erő adhat

forgatónyomatéket. Abban az esetben nem ad, ha hatásvonala átmegy e tengelyen, azaz az ábrán OPE háromszögben $\cos\alpha = \frac{r}{R}$ fennáll.

.18) Az ábrán látható elrendezésben az m_1 tömegű henger és az asztal között olyan a tapadási súrlódás, hogy a henger tisztán gördül. A csiga és a kötélt tömege elhanyagolható.

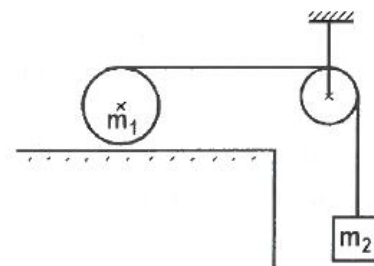
a) Mekkora a henger és az m_2 tömegű test gyorsulása?

$$(a_1 = \frac{4m_2}{8m_2+3m_1}g; a_2 = \frac{8m_2}{8m_2+3m_1}g)$$

b) Mekkora a kötélt által kifejtett erő? ($K = \frac{3m_1m_2g}{8m_2+3m_1}$)

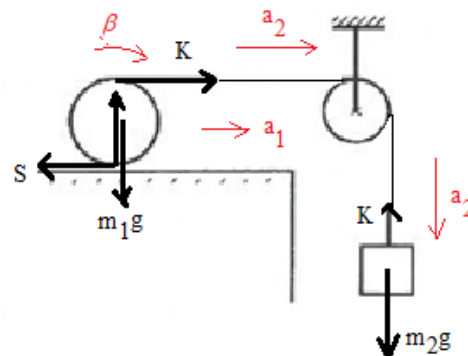
c) Milyen m_1/m_2 tömegarány esetén nem csúszik meg a henger, ha $\mu_0=0,12$, illetve

$$\mu_0=0,2? \left(\frac{m_1}{m_2} \geq \frac{1}{9}; \text{ bármilyen} \right)$$



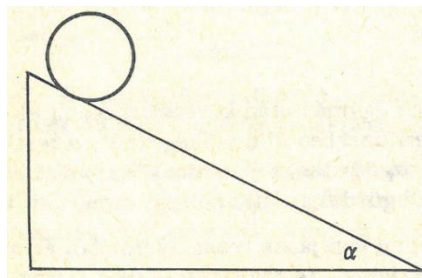
a-b) Az egyenletek:

- $T = m_1g$
- $K - S = m_1a_1$
- $(K + S)R = \left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\beta$
- $m_2g - K = m_2a_2$
- $a_1 = R\beta$, hogy a henger alsó pontja ne gyorsuljon a talajhoz képest,
- $a_2 = a_1 + R\beta$, hogy a henger felső pontja a kötélt gyorsulásával mozogjon.



c) Az egyenletrendszerből $S = \frac{-m_1m_2g}{8m_2+3m_1}$, (a súrlódási erő előre mutat!) A meg nem csúszás feltétele így

$$\frac{m_1m_2g}{8m_2+3m_1} \leq \mu_0m_1g, \text{ amiből } \frac{m_1}{m_2} \geq \frac{\frac{1}{3}-8}{3} \text{ a feltétel.}$$



.M19) Az α hajlásszögű súrlódásos lejtőn csúszás nélkül gördül le R sugarú, m tömegű korong, abroncs és golyó.

a) Melyik ér le előbb? (**golyó**)

b) Melyik ér le a legnagyobb sebességgel? (**golyó**)

c) Melyik csúszik meg először, ha a lejtő hajlásszögét növelni kezdjük? (**abroncs**)

d) Legyen $\mu_0=0,6$. Adjunk meg olyan hajlásszöget, amelynél a golyó és a korong közül az egyik megcsúszik, a másik nem. (**$60,9^\circ$ és $64,5^\circ$ között**)

.A) A fenti kérdésekre válaszoljunk úgy, hogy a mozgás egyenletrendszeréből meghatározzuk a gyorsulást és a súrlódási erőt!

.B) Adjunk választ a fenti .a-c) kérdésekre csupán az energiákat és a munkákat számolva is!

.A) A lejtőn a nehézségi erőt komponensekre bontjuk és a szokásos egyenleteket írjuk fel (mozgáseggy. komponensenként, forgó m. alapegyenlete, kényszer a tiszta gördülés miatt).

$$a = \frac{1}{1+\frac{\theta}{mR^2}}g\sin\alpha, \quad S = \frac{\frac{\theta}{mR^2}}{1+\frac{\theta}{mR^2}}mg\sin\alpha.$$

A három test között a különbség a $\frac{\theta}{mR^2}$ tagban van. Értéke rendre $\frac{1}{2}$, 1, és $\frac{2}{5}$.

a) A legnagyobb gyorsulású ér le a legkisebb idő alatt.

b) A megtett utak azonosak, így az átlagsebesség az idővel fordítottan arányos. A végsebesség az átlagsebesség duplája.

c) A legkisebb gyorsulásúra hat a legnagyobb súrlódási erő, de az összenyomó erők egyenlők, így ez csúszik meg a legelőbb.

d) A megcsúszási határszögek a tiszta gördülés ($S_{max}=\mu_0mg\cos\alpha$) feltételéből számíthatók: $\frac{\frac{\theta}{mR^2}}{1+\frac{\theta}{mR^2}}mg \cdot \tan\alpha \leq \mu_0$.

.B) Csúszási súrlódás nincs, a mechanikai energia megmarad (a tapadási súrlódás pozitív és negatív munkát is végez, de összegük 0). Ugyanaz a helyzeti energia alakul mozgási és forgási energiává a lejtő aljára érve.

Az összes mozgási energia mindkét testnél ugyanaz, és két tag összege: $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2$, de a tagok között a gördülés miatt a $v = R\omega$ összefüggése pontosan rögzíti az $1 : \frac{\theta}{mR^2}$ arányt.

.b) Az ér el a legnagyobb sebességet, amelyiknél ez az arány a legnagyobb.

.a) De így az átlagsebessége is legnagyobb, az ideje pedig a legkisebb.

.c) Legkisebb idő alatt ugyanazt a távolságot a legnagyobb gyorsulással, tehát a legkisebb súrlódási erővel lehet elérni, tehát ez csúszik meg a legnagyobb szögnél.

.20) Lejtősen állított két párhuzamos sín közé tengellyel ellátott korongot helyezünk. A tengely a súrlódásos síneken csúszás nélkül gördül. A korong sugara R , tömege m . A tengely sugara r , tömege a korong tömegéhez képest elhanyagolható.

.a) Mekkora a korong gyorsulása? $\left(\frac{r^2}{2r^2 + R^2} g \sin \alpha\right)$

.b) A tengely és a sínek között a nyugalmi súrlódási együttható μ_0 . Mekkora lehet a lejtő hajlásszöge, hogy a korong még csúszás nélkül gördüljön? $\left[\tan \alpha \leq \mu_0 \left(1 + \frac{2r^2}{R^2}\right) \right]$

.c) $R = kr$ esetén mekkora lenti sebességet ér el a h magasságból kezdősebesség nélkül induló korong? $\left(2\sqrt{\frac{hg}{2+k^2}}\right)$

.a-b)

$$T + F \sin \alpha = mg \sin \alpha - S = ma$$

$$Sr = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\beta$$

$$a = r\beta.$$

A megoldás:

$$a = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2} g \sin \alpha \quad \text{és} \quad S = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2} mg \sin \alpha$$

.c) Folytatva az eddigi eredményeknél: a lejtő hossza $l = h/\sin \alpha$, a rajta töltött idő $l = 1/2at^2$ -ből számítható, majd $v = at$. Avagy energiákkal egyszerűbben: az mgh helyzeti energia $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2$ mozgásivá alakul, de fennáll az $v = r\omega$ kényszer.

.21) Lejtősen állított párhuzamos sínek közé golyót helyezünk, melynek átmérője nagyobb, mint a sínek egymástól való d távolsága. A golyó a síneken csúszás nélkül gördül.

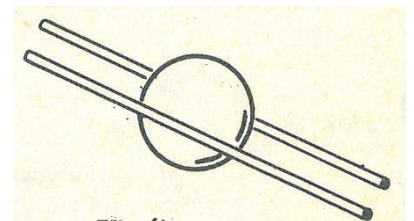
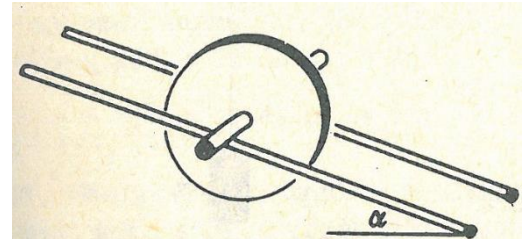
.a) Mekkora a golyó gyorsulása és az érintkezési pontokban ható súrlódási erők?

$$\left[a = \frac{20R^2 - 5d^2}{28R^2 - 5d^2} g \sin \alpha, \quad S = \frac{4R^2}{28R^2 - 5d^2} mg \sin \alpha \text{ pontonként} \right]$$

.b) Mi a tiszta gördülés feltétele? $\left(\tan \alpha \leq \mu_0 \frac{28 - 5\left(\frac{d}{R}\right)^2}{4\sqrt{4 - \left(\frac{d}{R}\right)^2}} \right)$

.c) A sík lejtőn leguruló golyó esetét a fenti feladattól $d=0$ speciális esetben megkapjuk. Ezért vegyük a fenti feladat eredményeit $d=0$ -ra. Ezután oldjuk meg a síkon le gördülő golyó mozgásának egyenletrendszerét, és ellenőrizzük, hogy ugyanazon eredmények jöttek-e ki! (**igen**)

.a) A két érintkezési pontban ható T nyomóerő a középpont felé mutat. A sínek síkjára merőleges komponenseik T_1 , a sínek síkjában fekvő komponenseik pedig T_2 . A T_2 erők hatása egymást lerontja, míg a T_1 erők együtt az $mg \cos \alpha$ erőt egyensúlyozzák. Az érintkezési pontokban hatnak még az egyenként S nagyságú tapadási súrlódási erők is, melyek ellentétesek a nehézségi erő $mg \sin \alpha$ komponensével és megforgatják a testet a TKP-n átmenő, a sínek síkjával párhuzamos, a sínekre merőleges egyenes körül.



Az S erők karja $r = \sqrt{R^2 - (d/2)^2}$ (a TKP távolsága a sínek síkjától). Az ábra szerinti két derékszögű háromszög hasonló.

Az egyenletek:

$$\begin{aligned} 2T_1 &= mg \cos \alpha \\ mg \sin \alpha - 2S &= ma \\ 2Sr &= \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\beta \\ a &= r\beta. \end{aligned}$$

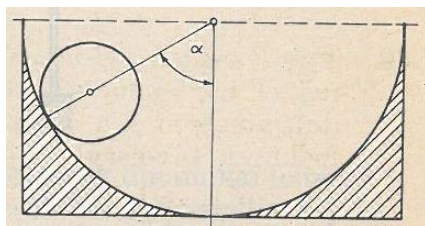
A megoldás:

$$a = \frac{20R^2 - 5d^2}{28R^2 - 5d^2} g \sin \alpha \quad \text{és} \quad S = \frac{4R^2}{28R^2 - 5d^2} mg \sin \alpha \quad \text{pontonként,}$$

$T_1 = mg \cos \alpha / 2$, amiből a hasonló háromszögek miatt a teljes nyomóerő pontonként $T = \frac{mg \cos \alpha}{2} \frac{R}{r}$.

.b) A meg nem csúszás szokásos $S \leq \mu_o T$ feltételéből adódik a felső korlát $\tan \alpha$ -ra.

.c) Mindkét gondolatmenettel a gyorsulás $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$, a teljes súrlódási erő $S = \frac{2}{7} mg \sin \alpha$. A megcsúszás $\tan \alpha = \frac{7}{2} \mu_o$ esetén következik be.



.22) R sugarú, henger alakú vályúban az $\alpha = 60^\circ$ -os helyzetből elindul egy $r = R/4$ sugarú tömör henger, és csúszás nélkül gördül.

a) Mekkora lesz súlypontjának sebessége a vályú aljában? ($\sqrt{gr/2}$)

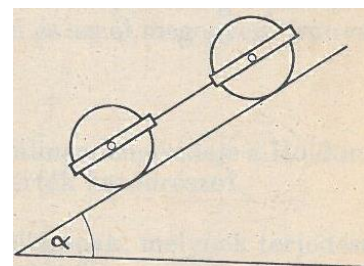
b) Mekkora erővel nyomja a vályú alul? ($5/3mg$)

.a) A tiszta gördülés miatt nincs disszipatív csúszási súrlódás, így a mechanika energia megmarad.

A mozgási energia két részből áll, de köztük a tiszta gördülés miatt $v_{TKP} = r\omega$ áll fenn (mert a közös érintkezési pont a vályúhoz képest nem mozog).

.b) A TKP sebességéből és körmozgásának sugarából számítható a szükséges centripetális erő, melyet a tartó- és a nehézségi erő együtt biztosít.

.23) Rúddal összekapcsolt két görgő gördül le a lejtőn, amely 45° -os szöget alkot a vízszintessel. A görgők tömege és sugara azonos. A görgőkeretek, valamint a rúd tömegét figyelmen kívül hagyhatjuk. Az első görgő tömör henger, a második üres (vékony falú cső). Legalább mekkora legyen a tapadó súrlódási együttható ahhoz, hogy a görgők csúszás nélkül gördüljenek? (**min. 0,04**)



Egyedül a henger más (nagyobb) gyorsulással gördülne le mint a cső, ezért a rúdban (húzó)erő ébred.

Az egyenletek (T , S_1 , S_2 , K , a , β) a szokásosak, kiegészítve a rúdban ébredő K húzóerővel:

$$\begin{aligned} T &= mg \cos \alpha \\ mg \sin \alpha - K - S_1 &= ma \\ mg \sin \alpha + K - S_2 &= ma \\ S_1 R &= \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\beta \\ S_2 R &= (mR^2)\beta \\ a &= R\beta. \end{aligned}$$

A megoldás: $a = \frac{4}{7} g \sin \alpha$ $S_1 = \frac{2}{7} mg \sin \alpha$ $S_2 = \frac{4}{7} mg \sin \alpha$ $K = \frac{1}{7} mg \sin \alpha$

A tiszta gördülés feltételéből a (a nagyobb súrlódási erőt igénylő) abroncsnál $\frac{4}{7} g \sin \alpha \leq \mu_o \cos \alpha$.

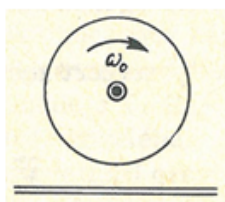
M24) Egy R sugarú, m tömegű tekegolyót v_0 kezdősebességgel úgy löknek el, hogy nem hozzák forgásba. A golyó a pályán csúszva indul, amelyen μ a csúszási súrlódási együttható. Az indulástól mekkora távolságban kezd a golyó tisztán gördülni? $\Theta = \frac{2}{5} m R^2$. $(s = \frac{12v_0^2}{49\mu g})$

A talajon a golyó érintkezési pontja előre csúszik, így hátrafelé mutató $S = \mu mg$ csúszási súrlódási erő ébred, ami a golyót lassítja ($a = S/m = \mu g$) és a szögsebességét növeli ($\beta = \frac{SR}{\theta} = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R}$).

A sebesség és a szögsebesség időfüggése ismert: $v(t) = v_0 - at$ ill. $\omega(t) = \beta t$.

A tiszta gördülés akkor kezdődik, amikor $v(t) = R\omega(t)$. Ebből $t = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}$.

Az eddig megtett út és a kialakult sebesség is számolható.



.25) Tengely körül forgatható korongot (pl. kerékpár első kerekét) tengelye körül ω_0 sebességgel forgásba hozunk. A tengelyét vízszintes helyzetben tartjuk úgy, hogy a kerék a talajt nem érinti. Ezután a korongot óvatosan vízszintes talajra engedjük. (A talajteréskor a tengelyt elengedjük.) A korong a talajon kezdetben csúszva, később tisztán gördül.

.a) Magyarazzuk meg mi módon jut a tömegközéppont haladó sebességhez?

.b) Mekkora v sebességet ér (érhet) el a tömegközéppont? **($R\omega_0/3$)**

.c) Mi a szerepe az energiaátalakulások során a (csúszási) súrlódási erőnek?

.a) Előrefelé mutató csúszási súrlódási erő ébred, ami gyorsítja.

.b) A gyorsulása $a = S/m = \mu g$, a szöglassulása $\beta = \frac{SR}{\theta} = 2 \frac{\mu g}{R}$, tiszta gördülés pedig $v(t) = R\omega(t)$ esetén lesz.

Ebből az idő: $t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}$. Ekkor a sebesség és a szögsebesség: $v = \frac{R\omega_0}{3}$ és $\omega = \frac{\omega_0}{3}$, az eddig megtett út pedig $s = \frac{(R\omega_0)^2}{18\mu g}$.

.c) A csúszási súrlódási erő gyorsít, miközben szöglassít. Előbbi miatt pozitív, utóbbi miatt negatív munkát végez, így csökkenti a TKP-i mozgási energiát, de növeli a forgási energiát. Csakhogy! A két munka nem egyenlő nagyságú, így az összmunka negatív, azaz csökken a mozgási energia, a csúszási súrlódás energiát „disszipál”.

$$W_S = Ss - S(R\Delta\alpha) = \dots = \frac{1}{18} m(R\omega_0)^2 - \frac{2}{9} m(R\omega_0)^2 = -\frac{1}{6} m(R\omega_0)^2.$$

Év valóban, a mozgási energia is ennyit csökkent: $\Delta E_m = \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \theta \omega^2 \right) - \frac{1}{2} \theta \omega_0^2 = \dots = -\frac{1}{6} m(R\omega_0)^2$.

.26) R sugarú m tömegű abroncsot („hulahopp-karikát”) függőleges síkban, a talaj fölött, középpontja körül ω_0 szögsebességgel „visszafelé” megforgatva úgy dobunk el, hogy középpontjának sebessége az eldobás irányában v_0 .

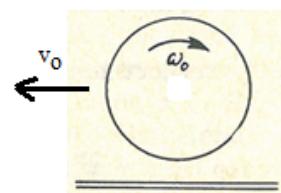
.a) Mi történik?

.b) Mennyi idő múlva lesz tiszta gördülés? **($(v_0 + R\omega_0)/(2\mu g)$)**

.c) Mekkora ω_0 -val érhető el, hogy az abroncs a talajt érés utáni mozgása során visszaforduljon (visszafelé haladjon)? **($\omega_0 > v_0/R$)**

.d) Mekkora ω_0 esetén fog az eldobással *megegyező nagyságú* sebességgel visszatérni az eldobóhoz? A visszaérkezéshez képest előbb vagy utóbb kezdődik a tiszta gördülés? **($\omega_0 = 3v_0/R$, pont akkor)**

.e) Vizsgáljuk az energiaváltozásokat és a tiszta gördülés kialakulásáig!



.a) A karikára hátrafelé ható súrlódási erő hat, mely csökkenti a sebességét, miközben a visszafelé-forgás szögsebességét is. Egy idő múlva a karika tisztán gördülni kezd. A gördülés iránya az eredeti sebességgel ellentétes irányú is lehet.

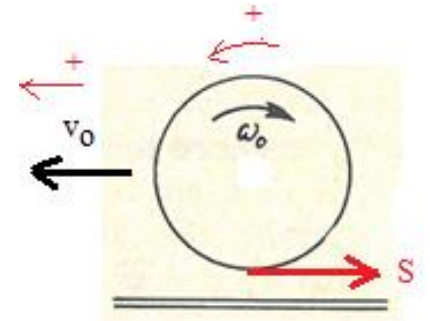
.b) Jelöljenek v_0 és ω_0 pozitív számokat, a megfelelő vektorok és skalárok előjelét az ábra szerint vesszük pozitívnak.

A csúszási súrlódási erő lassít és perdít: $a = -\mu g$, $\beta = \frac{\mu g}{R}$.

$v(t) = v_0 - \mu g t$ ill. $\omega(t) = -\omega_0 + \frac{\mu g}{R} t$ időtől függenek.

A tiszta gördülés pillanatában $v(t) = R\omega(t)$,

ebből $t = \frac{v_0 + R\omega_0}{2\mu g}$ és $v(t) = \frac{v_0 - R\omega_0}{2}$.



.c) $v(t) < 0$

.d) $v(t) = -v_0$ legyen. A tiszta gördülésig megtett elmozdulás: $\Delta s = \frac{(v_0 + v(t))}{2} t$.

.e) A mozgási energia két tagból áll: $\frac{1}{2} m v_{TKP}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$.

Amíg a $v(t)$ és $\omega(t)$ ellentétes előjelű, addig a *súrlódási erő mindkét tagot csökkenti* (lassít és a forgást is mérsékli), az elvett mechanikai energia az asztal és a test melegedését okozza, a környezetbe távozik. Ez egészen addig tart, amíg v vagy ω egyike 0-vá nem válik. Ekkor a mozgási energiaösszeg ennek megfelelő tagja 0 lesz.

Ezután ez az energiatag ismét nőni kezd, hiszen a 0-ra csökkenő mennyiség abszolútértéke az előjelváltás után nőni fog. Most a súrlódás pozitív és negatív munkát is végez, *de összegük negatív* (a csúszás miatt még mindig fogy az energia). Az egyik energiatag nő, de a másik annál többel csökken.

A tiszta gördülés beállta után megszűnik az energiacsökkenés, egyik energiatag sem változik, a súrlódási erő nem semmi munkát.

.....

.M27) Az m tömegű $L = 0,5$ m hosszú egyenletes keresztmetszetű rudat, amely vízszintes tengely körül forgatható, az ábrán látható módon fonállal vízszintes helyzetben rögzítjük, majd a fonalat elégetjük.

.a) Elégetés után mekkora a rúd végének gyorsulása? (**3g/2**)

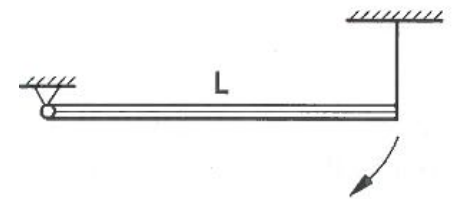
.b) Elégetés után mekkora erővel nyomja a tengelyt a bal vég? (**mg/4**)

.c) Mekkora a tengelyt nyomó erő, amikor a rúd α szöget zár be a vízszintessel?

$$(C = \frac{1}{4} mg \sqrt{100 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha})$$

.d) A rúd mely helyzetében lesz a csuklóerő $2mg$ nagyságú? (**52,9°**)

.e) Mekkora a rúd végpontjának sebessége, amikor a rúd az egyensúlyi helyzeten áthalad? (**3,87 m/s**)



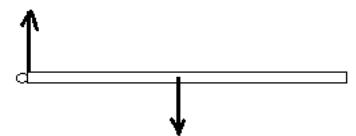
.a-b) A rúdra a nehézségi erő és a csuklóerő hat függőlegesen (mert vízszintesen $\Sigma F = 0$, hiszen $a_{TKP} = 0$).

$$mg - C = ma$$

$$mg \frac{L}{2} = \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \beta$$

$$a - R\beta = 0, \text{ mert a bal vég nem gyorsul. A megoldás: } a = 3/4 mg, \quad \beta = 3/2 g/L, \quad C = mg/4.$$

A jobb vég gyorsulása: $a + \frac{L}{2} \beta$, nagyobb lesz mint g! A C erő ugrásszerűen csökken a fonál elégetésekor.



.c-d) Az *energiamegmaradásból* megtudhatjuk a szögsebességet az α szögnél, mivel a helyzeti energia csuklón átmenő tengely körüli forgási energiává válik:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} \sin \alpha}, \text{ amiből a TKP sebessége: } v = \frac{\sqrt{3gL \sin \alpha}}{2}, \text{ ebből a centripetális}$$

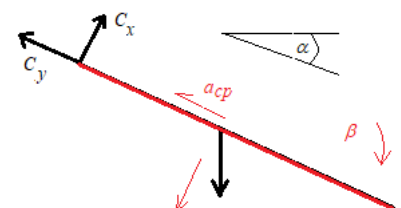
$$\text{gyorsulás: } a_{cp} = \frac{3}{2} g \sin \alpha.$$

$$\text{A csuklón átmenő tengelyre felírt forgómozgás alapegyenletéből } mg \frac{L}{2} \cos \alpha =$$

$$\left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \beta \text{ adódik a szöggyorsulás: } \beta = \frac{3}{2} g L \cos \alpha, \text{ amiből a TKP érintő irányú gyorsulása: } a_x = \frac{3}{4} g \cos \alpha.$$

Ezután a dinamika alapegyenletei adják meg a csuklóerő komponenseit:

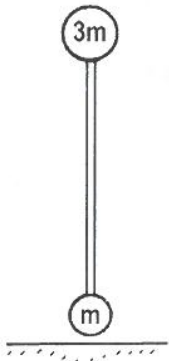
$$C_y - mg \sin \alpha = m a_{cp}, \quad \text{amiből } C_y = \frac{5}{2} mg \sin \alpha, \text{ illetve....}$$



$$mg\cos\alpha - C_x = ma_x, \quad \text{amiből } C_x = \frac{1}{4}mg\cos\alpha.$$

$$\text{Ezeket Pitagorasz-tétellel összerakva: } C = \frac{1}{4}mg\sqrt{100\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

.e) Az fentiekben az energiamegmaradásból adódott a szögsebesség, abból pedig a TKP sebessége, ami a függőleges helyzetben $v = \frac{\sqrt{3gL}}{2}$, aminek a duplája a vég sebessége.



.28) Súrlódásmentes talajon 80 cm hosszú pálca áll labilis egyensúlyi helyzetben. Az elhanyagolható tömegű pálca alsó végéhez m , a felső végéhez $3m$ tömegű pontszerű test van erősítve. Amikor a pálca eldől, alja elcsúszik, de közben az alsó test nem emelkedik fel az asztalról.

a) Milyen távol van kezdeti helyzetétől az m tömegű test, amikor a $3m$ tömegű test a talajba ütközik? **(60 cm)**

b) Mekkora és milyen irányú sebességgel ütközik a talajba a $3m$ tömegű test, és mennyi ekkor az m tömegű test sebessége? **(4 m/s, 0 m/s)**

Vízszintes irányba nem hat (súrlódási) erő, így a rendszer TKP-ja vízszintesen nem mozdul, csakis a függőleges egyenes mentén halad lefelé. Mivel a talajra érskor a TKP-nek nincs vízszintes sebessége és a rúd is vízszintes, továbbá a rúdon a TKP helye fix, ezért egyik tömegnek sem lehet az asztalon vízszintes sebessége.

Így a leérkezéskor a kis tömeg 0 sebességű, a nagyak a sebessége pedig függőleges.

A ható erők konzervatívak, a mechanikai energia megmarad, a helyzeti energia $3mgl$ csökkenése megegyezik az összes mozgási energiával, amit csupán a nagy tömeg hordoz $\frac{1}{2}(3m)v^2$.

.29) Egy 15 cm hosszú ceruzát hegyével az asztalra támasztva függőlegesen tartunk, majd elengedünk. Dőlés közben az alsó vége nem csúszik meg. A ceruza végpontján áthaladó, hosszára merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték $\frac{1}{3}ml^2$.

a) Mekkora sebességgel csapódik az asztalra a ceruza másik vége? **(2,12 m/s)**

b) Az álló ceruza mely pontja az, amely akkora sebességgel csapódik az asztalhoz, mintha a kezdeti magasságból szabadon esett volna? **(az álló ceruza felső harmadolópontja)**

c) Hogyan dül el a gyárkémény, melyet úgy döntenek el, hogy egyik oldalán alul robbantást végeznek? Keressünk ilyen videókat a NET-en! Magyarázzuk meg a látottakat! **(dőlés közben általában eltörik)**

a) A helyzeti energia forgásivá alakul, tengely az asztalon. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$ lesz.

b) Ha a keresett pont eredetileg x magasságban volt, akkor onnan $\sqrt{2gx}$ sebességgel esne le. A rúddal együtt utazva pedig $x\omega$ sebességgel. Ezek egyenlők.

c) A kémény felső harmadának téglái g -nél nagyobb gyorsulással mozognak a dőlés egyes szakaszában, ehhez azonban az alattuk lévő habarcsrétegnek kell őket gyorsítani. Sőt a felettük lévő habarcsréteggel nekik kell gyorsítani a felső szomszédjukat. A habarcsrétegeknél a nagy erők hatására elválnak a téglák, a kémény dőlése közben a felső részen eltörhet, a letört felső rész lemarad.

- https://www.youtube.com/watch?v=t_I9PdGSTds (izgalmas)
- <https://www.youtube.com/watch?v=MQ7fuywnUsM> (jó, szép, magyar kémény)
- <https://www.youtube.com/watch?v=ubgXwdIdR9w> (magyar kémény)
- <https://www.youtube.com/watch?v=XQzhSBDIkRg#:~:text=URL%3A%20https%3A%2F%2Fwww,100> (tudományos magyarázat, levezetéssel, angol nyelven)
- <https://www.youtube.com/shorts/B3WVAgMSHFI?feature=share> (rövid)
- <https://www.youtube.com/watch?v=X9KUMb0sio0> (szép, de előtte reklám)
- <https://youtu.be/jI0ryk39H4w> (előtte reklám)
- <https://www.youtube.com/watch?v=jI0ryk39H4w> (7 perc, rengeteg kémény)

.30) Egy 15 cm hosszú ceruzát hegyével az asztalra támasztva függőlegesen tartunk, majd elengedünk. Az asztalon nincs súrlódás így az alsó vég *megcsúszik*, de fel nem emelkedik.

- a.)** Mekkora sebességgel csapódik a ceruza felső vége az asztalhoz? (2,12 m/s)
b.) *Indokoljuk, hogy az asztalról nem emelkedik fel a megcsúszó vég! (Nehéz feladat!)
c.) Mekkora lesz az asztalon lévő vég gyorsulása a becsapódáskor? (3/2g a másik vég irányába)
d.) Lesz-e olyan helyzet, amikor az asztalon lévő vég gyorsulása 0? (igen, $\alpha=37,8^\circ$ -nál)

a.) Súrlódás nincs, a TKP vízszintesen nem mozog, így függőlegesen helyben marad. Így becsapódáskor mindkét végnek csak függőleges sebessége lehet (a vízszintes sebességek a rúd merevsége miatt csak egyenlők lehetnének, de ez akkor a TKP-nek is ez lenne a vízszintes sebessége).

A becsapódáskori összes mozgási energia a helyzeti energia csökkenéséből származik: $\frac{1}{2}mv_{TKP}^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2 = mg\frac{l}{2}$.

A benne lévő két ismeretlen közötti kényszer, hogy a bal vég függőleges sebessége 0: $v_{TKP} - \frac{l}{2}\omega = 0$.

A megoldás: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ és $v = \sqrt{3gl}$ mint az előző példában. (Nem meglepetés, hiszen a bal vég 0 sebessége miatt ezt rögzített tengelynek is tekinthetjük a becsapódás pillanatában, ahogy az előző feladatban, és az összes mozgási energia is ugyanaz.)

b.) Az a szöggel megdőlt rúdra két erő hat: K és mg, amíg a bal vég az asztalon van. Kiszámoljuk a K erő értékét, és addig marad a rúd az asztalon, amíg K értéke nemnegatív.

Két egyenlet könnyen felírható (K, a_{TKP} , β ismeretlenekre):

$K - mg = ma_{TKP}$ a dinamika alapegyenlete és..

(1)

$K\frac{l}{2}\sin\alpha = \left(\frac{1}{12}ml^2\right)\beta$ a forgó mozgás alapegyenlete a TKP-i tengelyre. (2)

A harmadik egyenlet azt a kényszeret fogja kifejezni, hogy az asztalon lévő bal végnek nincsen függőleges gyorsulása.

Tekintsük a bal vég (IR-beli, asztalhoz képesti) gyorsulását:

$\vec{a}_{vég(IR)} = \vec{a}_{vég(TKP)} + \vec{a}_{KP(IR)} = (\vec{a}_{é(TKP)} + \vec{a}_{cp(TKP)}) + \vec{a}_{TKP(IR)}$.

A végnek a TKP-hez képesti gyorsulása a változó forgómozgás miatt van érintő irányú $a_{é(TKP)} = \frac{l}{2}\beta$ és rúdírányú $\vec{a}_{cp(TKP)}$ centripetális komponensre bontva.

Így a kényszerfeltétel: $\frac{l}{2}\beta\sin\alpha + a_{cp}\cos\alpha - a_{TKP} = 0$ (3)

Ebben azonban ismeretlenként megjelent a centripetális gyorsulás. Ennek értékét a TKP körüli forgómozgás ω szögsebességéből kapjuk: $a_{cp} = \frac{l}{2}\omega^2$ módon.

Meg kell tehát határozni a szögsebességet. Az energiamegmaradás segít, azzal a kényszerrel kiegészítve, hogy a bal vég sebessége függőlegesen 0: $\frac{1}{2}mv_{TKP}^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2 = mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha\right)$, és a kényszer: $v_{TKP} - \frac{l}{2}\omega = 0$.

Ebből ω számolható, és ezzel $a_{cp} = 6g\frac{1-\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$. Ezt beírva a (3)-as „kényszer” egyenletbe, már megoldható lesz az (1)-(3) egyenletrendszer. Hosszas számolások után:

$$K = mg\frac{1+3(\cos\alpha-1)^2}{(1+3\sin^2\alpha)^2} \quad a_{TKP} = g\left[1 - \frac{1+3(\cos\alpha-1)^2}{(1+3\sin^2\alpha)^2}\right] \quad \beta = \frac{6g\sin\alpha}{l}\frac{1+3(\cos\alpha-1)^2}{(1+3\sin^2\alpha)^2}.$$

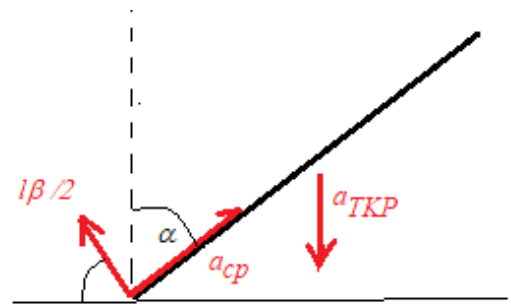
Látható, hogy K értéke minden szögre pozitív, tehát az asztaltól nem emelkedik fel az eldőlt rúd bal vége. (Érdemes $\alpha=0^\circ$ és $\alpha=90^\circ$ esetére kiszámolni K és a_{TKP} értékeit, hogy lássuk, visszatér-e a képlet a korábban megismert $K=mg$ és $\frac{1}{4}mg$ illetve $a=0$ és $\frac{3}{4}g$ értékeik.)

c.) Az asztalon lévő végnek csak vízszintes gyorsulása van, mnégpedig az ábra szerint (a balra mutató irányt

pozitívnak választva): $a_{vízsz} = \frac{l}{2}\beta\cos\alpha - a_{cp}\sin\alpha = \dots = 3g\sin\alpha\frac{9\cos\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha-8}{(1+3\sin^2\alpha)^2}$. Ez kezdetben

($\alpha=0^\circ$) 0, becsapódáskor ($\alpha=90^\circ$) pedig $-3/2g$.

d.) A bal vég vízszintes gyorsulása lehet-e 0 a kezdőhelyzettől eltekintve? A fenti nagy tört nevezője mindig pozitív, tehát van-e a számlálójának zérushelye?



A számláló $\alpha=0^\circ$ esetén 1, $\alpha=90^\circ$ esetén pedig -8, s mivel α -nak folytonos függvénye, ezért valahol a 0 értéket is felveszi. Valójában a tört számlálóját átalakítható „ $\cos\alpha$ ” harmadfokú polinomjává és okosabb számológép megadja a gyökét. $\alpha=37,8^\circ$

.M31) Egy $a \times a$ oldalélű h magasságú m tömegű homogén téglatestet az asztallal párhuzamosan, a felső él középpontjában F erővel húzzuk.

Ne legyen súrlódás és legyen $h=2a$!

.a) Miért nem borul fel a kocka, ha a kicsi F erő hatására, annak ellenére sem, hogy a kocka középpontjára vonatkozóan van forgatónyomatéka a kicsi F erőnek is? (?)

.b) Felburul-e a kocka, ha $F=mg/3$? (**nem**)

.c) Mi a hiba az alábbi gondolatmenetben? „A felburulás *határhelyzetében* a T erő a tégl jobb alsó sarkánál hat. Ide választva a tengelyt, a *határhelyzetei* F' erő forgatónyomatéka $F'h$, amit az mg erő $mga/2$ forgatónyomatéka kompenzál (T -nek most nincs forgatónyomatéka). Így $F' = \frac{mga}{2h} = \frac{mg}{4}$ a felborító erő. Mivel a mostani $F=mg/3$ erő ennél nagyobb, a kocka felborul a csúszás közben!” (?)

Legyen most súrlódás és $\mu=\mu_0=0,3$!

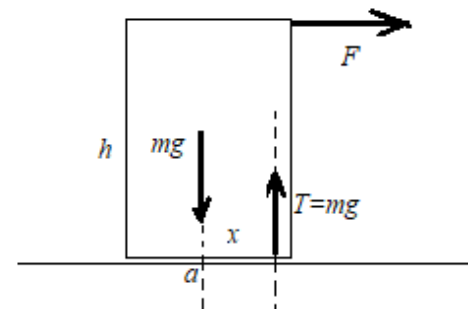
.d) Mekkora lehet a test alakját jellemző h/a arány, hogy a test felboruljon még azelőtt, mielőtt megcsúszna? (**min. 5/3**)

.e) Szeretnénk, ha kocka alakú test esetén az megcsúszna, de csúszás közben nem borulna fel. Mekkora F húzóerőt alkalmazhatunk? (**0,3mg és 0,7mg között**)

.f) Szeretnénk, ha $h/a=2$ alakú test esetén az megcsúszna, de csúszás közben nem borulna fel. Mekkora F húzóerőt alkalmazhatunk? (**lehetetlen**)

.a) Az alsó tartóerő felületi eredők eredője. Ha nem húzzuk a kockát, akkor a tartóerő a felületen egyenletesen oszlik el (mindenütt ugyanakora nyomást létesítve). F húzóerő hatására az eloszlása nem lesz egyenletes, így az eredő tartóerő hatásvonal az ábra szerint középről kimozdul a tégl jobb oldala felé, ezzel olyan forgatónyomatékokat hoz létre, mely egyensúlyt tud tatani az F erő forgatónyomatékával. T hatásvonal maximum a tégl jobb alsó sarkáig tud elmozdulni.

Mindeközben a tégl gyorsul az F erő irányába és $T=mg$, mert függőleges gyorsulás nincs.



.b) A húzóerő forgatónyomatéka a TKP-n átmenő tengelyre $F \frac{h}{2}$, ezt kell kompenzálnia a $T=mg$ erő

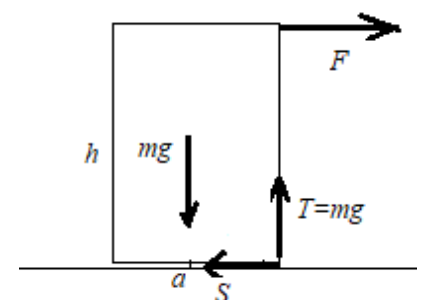
forgatónyomatékának, tehát a hatásvonalának jobbrtolódása $x = \frac{F \frac{h}{2}}{T} = \frac{h}{6} = \frac{a}{3} < \frac{a}{2}$, ezért a hatásvonal még nem ért el a tégl jobb sarkához, nem borul fel.

.c) A hiba az, hogy a felborulás feltétele most nem az, hogy a jobb alsó sarkon átmenő tengelyre számított forgatónyomatékek előjeles összege 0 legyen! Ez akkor lenne igaz, ha érvényes lenne a forgómozgás alapegyenlete erre a tengelyre (ekkor $\beta=0$ miatt $\Sigma M=0$ következne). De ez most nem érvényes, ugyanis ez a tengely inerciarendszerben gyorsul!

.d) Hogy meg ne csússzon, $F \leq 0,3mg$ kell. ($S=F$, miközben $S \leq \mu mg$)
De közben boruljon fel: $Fh \geq mg \frac{a}{2}$. (Ez adódik, akár TKP_n, akár a jobb alsó sarkon átmenő tengelyt is választjuk, hiszen most egyik tengely sem gyorsul IR-ben!)

Így $h/a > 5/3$ adódik. (a magasság az alapélnak legalább 2,67-szerese legyen!)

.e) Most gyorsulva csúszik, tehát a súrlódási erő $S=\mu mg$ és csakis a TKP_n átmenő tengelyt használhatjuk az forgási egyensúly felírásakor.



A csúszáshoz $F > 0,3mg$, míg a forgási egyensúlyhoz $F \frac{h}{2} + \mu mg \frac{h}{2} \leq mg \frac{a}{2}$, azaz a kockára $F \leq 0,7mg$.

.f) A gondolatmenet ugyanaz, csak a forgási egyensúlyból $F \leq 0,2mg$ adódik, ami ellentmond a megcsúszáshoz szükséges $F > 0,3mg$ feltételnek.

.....

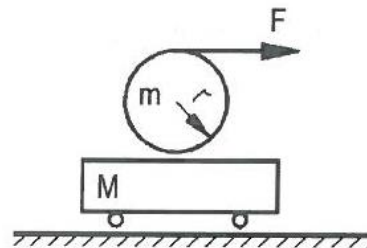
.32) Könnyen gördülő $M = 5$ kg tömegű kocsin $m = 10$ kg tömegű $r = 0,2$ m sugarú korong. A korong peremére vékony fonalat cséváltunk.

.a) Mekkora gyorsulással mozog a korong és a kocsi, ha a fonalat állandó, vízszintes $F = 100$ N erővel húzzuk és a kocsi, valamint a korong között a súrlódási együttható $\mu = 0,1$? (**11 m/s^2 és 2 m/s^2**)

.b) Mekkora a két test mozgási energiája 2 m hosszú fonál letekeredése után?

(**$E_{\text{kocsi}} = 2,222 \text{ J}$; $E_{\text{korong}} = 314,4 \text{ J}$**)

.c) Legfeljebb mekkora lehet a henger (középpontjának) a kocsihoz képesti relatív gyorsulása anélkül, hogy a henger megcsúszna a kocsin? (**8 m/s^2**)



.a) Tételezzük fel, hogy nem csúszik a korong a kocsin.

$$F + S = ma$$

$$-S = MA$$

$$Fr - Sr = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\beta$$

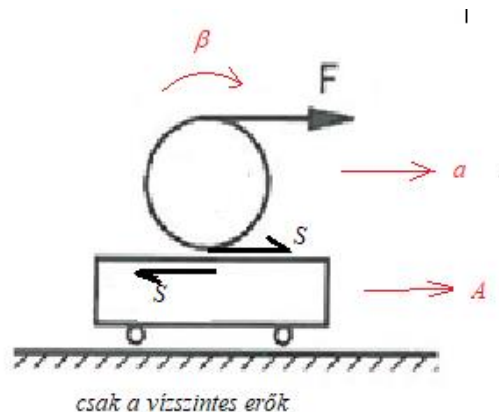
$$a - r\beta = A \quad (\text{a korong nem csúszik a kocsin})$$

A megoldásból: $S = \frac{M}{3M+m}F = 20 \text{ N}$, miközben a maximális tapadási

súrlódási erő $\mu mg = 10 \text{ N}$ lehetne. Sajnos megcsúszik!

Ekkor az 4. egyenletet eldobjuk, helyette viszont az $S = \mu mg$ egyenlet kerül, az egyenletrendszer négy egyszerű egyenletre esik szét.

$$a = 11 \text{ m/s}^2 \quad A = -2 \text{ m/s}^2 \quad \beta = 90 \text{ 1/s}^2. \quad (\text{a kocsi balra gyorsul})$$



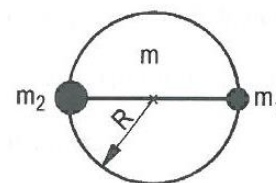
.b) A letekeredő fonál $2m = \frac{1}{2}\beta t^2$, a kocsi energiája $\frac{1}{2}M(At)^2$, a korongé: $\frac{1}{2}m(at)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)(\beta t)^2$.

.c) A meg nem csúszás egyenletrendszeréből kiszámolandó a és A , majd $a_{\text{rel}} = a - A = \frac{4}{25kg}F$. Majd a meg nem csúszás esetén lehetséges legnagyobb húzóerő értékét (50 N) kell F helyére írni.

.33) Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 0,06$ kg tömegű tömör korong a középpontján átmenő és a korong síkjára merőleges vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A korong kerületére két átellenes pontban egy-egy pontszerű testet erősítettünk, amelyek tömege $0,02$ kg, ill. $0,03$ kg. Az ábra szerinti helyzetben a rendszert magára hagyjuk. A súrlódás elhanyagolható!

.a) Mekkora a korong szöggyorsulása az elindulás pillanatában? (**$12,5 \text{ 1/s}^2$**)

.b) Mekkora a pontszerű testeknek a mozgás során elért legnagyobb sebessége? (**$0,5 \text{ m/s}$**)



.a) A szöggyorsulást a forgatómomenték okozza az együttes tehetetlenségi nyomatékú rendszernek.

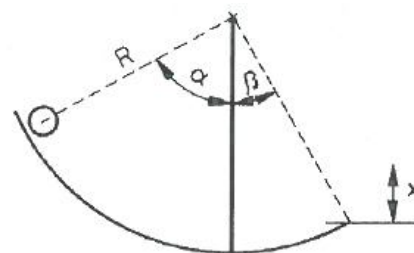
.b) A sebesség legnagyobb, ha nagyobb tömeg legalul van. A helyzeti energia csökkenése forgási energiává alakul.

.34) Adott a negyedkörívből álló lejtő. $R = 1$ m, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Egy kis abroncs csúszás nélkül gördül le a bal oldali végéről. Milyen x magasságig emelkedik a lejtő elhagyása után? (**$4,58 \text{ cm}$**)

A helyzeti energia csökkenése mozgási energiává válik (pici az abroncs!) $E_m = \frac{mgr(\sqrt{3}-1)}{2}$.

Ennek pontosan fele a TKP mozgási energiája, (mert az abroncs tiszta

gördülésekor $v_{TKP} = R\omega$ és $\theta = mR^2$): $E_{TKP} = \frac{mgr(\sqrt{3}-1)}{4}$.



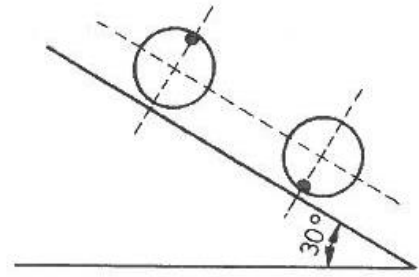
Az elválás után a forgási energia állandó marad, de a TKP sebességének függőleges komponense a legmagasabb ponton eltűnik.

Mivel az elrugaszkodás szöge 30° , ezért a függőleges sebesség a teljes sebességének fele, így az elvesző mozgási energia (ami helyzetivé válik) az elrugaszkodási E_{TKP} energiájának a negyede lesz.

.35) A 30° -os hajlásszögű lejtőn lévő $0,6\text{ m}$ sugarú, 4 kg tömegű abroncsra a lejtővel való érintkezési ponttal átellenben 4 kg tömegű testet erősítünk. Az abroncsot elengedjük, és az csúszás nélkül legördül.

a.) Mekkora a helyzeti energia csökkenése fél fordulat alatt? (**117,0 J**)

b.) Mennyi ekkor az abroncsra erősített testnek, és mennyi az abroncs tömegközéppontjának a sebessége? (**0 ill. $5,41\text{ m/s}$**)

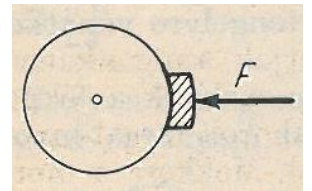


a.) Az abroncs középpontja $2R\pi\sin\alpha = \frac{R\pi}{2}$ -vel, a kis tömeg pedig $\frac{R\pi}{2} + 2R\cos 30^\circ$ -kal kerül alacsonyabbra.

b.) A tiszta gördülés miatt a tapadási súrlódás nem csökkenti a mechanikai energiát (összmunkája 0). Továbbá a kis test sebessége 0 (a lejtőhöz képest nem mozog).

A mozgási energia így csak az abroncs energiája: $\frac{1}{2}mv_{KP}^2 + \frac{1}{2}\theta_{abr}\omega^2$, miközben $v = R\omega$.

.36) 50 kg tömegű, 50 cm sugarú korong szögsebessége 10 s^{-1} . Mekkora sugárirányú erővel kell a féktuskót a kerékhez szorítani, hogy 20 másodperc alatt lefékezzük azt, ha a féktuskó és a korong pereme között a súrlódási együttható $0,5$? (**12,5 N**)



A súrlódási erő forgatónyomatéka a fékezés során csökkenti a perdületet: $\frac{\Delta(\theta\omega)}{\Delta t} = SR$.

.37) Egy 2 kg tömegű, 20 cm sugarú tömör henger $120\frac{1}{s}$ szögsebességgel forog a tengelye körül, $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$.

a.) Legalább mekkora, a palástra ható, állandó erővel tudjuk a hengert 2 s alatt megállítani? (**12 N**)

b.) Mekkora a henger a palást egy pontjának gyorsulása a henger megállása előtt $0,1\text{ s}$ -mal? (**$13,99\text{ m/s}^2$**)

c.) Mekkora munkavégzés szükséges a henger megállításához? (**-288 J**)

a.) Az erő állandó forgatónyomatéka csökkenti a perdületet: $\frac{\Delta N}{\Delta t} = M$ Érinő erőt kell alkalmazni, ha minimális erőt keresünk.

b.) A pont gyorsulásának két komponense van: centripetális és érintő irányú.

A centripetális gyorsulás ($7,2\text{ m/s}^2$) a pillanatnyi szögsebességből adódik (6 1/s).

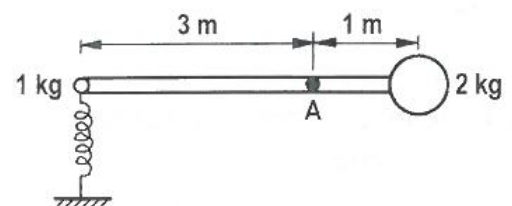
Az érintő irányú (12 m/s^2) pedig a szöggyorsulásból (60 1/s^2).

c.) A (negatív)munkavégzés a forgási energiát veszi el.

.38) Az ábrán látható rendszer elhanyagolható tömegű rúd, amelynek két végére egy-egy testet erősítettünk. A rendszer a rögzített A tengely körül súrlódás nélkül foroghat. A rúd vízszintes helyzetében a bal oldali testet egy 5 cm -rel összenyomott, $200\frac{\text{N}}{\text{cm}}$ rugóállandójú rugón tartjuk. A testet elengedve a rugó a rendszert forgásba hozza.

a.) Számítsuk ki a forgásban lévő rendszer szögsebességének legkisebb értékét! (**$1,65\text{ 1/s}$**)

b.) A rendszer legkisebb szögsebességű helyzetében mekkora és milyen irányú erő hat a rúdra az A pontban? (**$27,28\text{ N}$**)



a.) A szögsebesség akkor a legkisebb, mikor a *kicsi!* tömeg van a legmagasabban (ui. kezdetben a TKP balra van A-tól). A rugó rugalmas energiája (25 J) a rendszer forgási energiájává válik az ellökéskor. Ennek egy része helyzeti energiává alakul a kívánt helyzet eléréséig (10 J). A maradék a rendszer forgási energiája lesz.

.b) A körmozgás dinamikai feltételeit a testekre felírva, a testekre ható rúderők számolhatóak. A rúderők ellentettjeinek összege hat a tengelyre..

.39) Egy 0,4 kg tömegű, egyenletes tömegeloszlású 76 cm hosszú rúd egyik végén vízszintes tengelyhez van rögzítve, amely körül súrlódásmentesen foroghat a függőleges síkban. A labilis egyensúlyi helyzetben levő rúd elhanyagolható kezdősebességgel kibillen.

- a) Mekkora a rúd szögsebessége akkor, amikor először halad át a vízszintes helyzeten? **(6,28 1/s)**
- b) Mekkora a rúd szöggyorsulása ugyanakkor? **(19,7 1/s²)**
- c) Milyen irányú erővel hat a tengely a rúdra ebben a pillanatban? **(9,46° a vízszinteshez)**

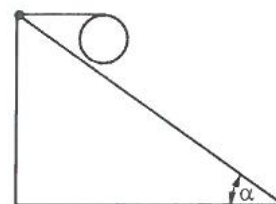
a) Energiamegmaradás.

b) Forgó mozgás alapegyenlete (a rögzített tengelyre).

c) A csuklóerő és a nehézségi erő hat. Eredőjük egyik komponense ma_{cp} , másik komponense ma_{ϵ} , ahol a a TKP gyorsulásának két komponense a_{cp} , és a_{ϵ} . Előbbi a szögsebességből, utóbbi a szöggyorsulásból számítható.

.40) A 0,4 kg tömegű és 5 cm sugarú homogén korongot a síkjába eső vízszintes fonállal rögzítjük az $\alpha = 36^\circ$ -os lejtőn. A fonál a koronghoz kapcsolódik, a korong a lejtőn nem csúszik meg.

- a) Mekkora a fonálerő? **(1,300 N)**
- b) Legalább mekkora tapadási súrlódási együttható szükséges? **(0,325)**
- c) A fonál elvágása után mennyi idő alatt tesz meg a korong 5 m-nyi utat? **(1,597 s)**
- d) Mekkora a korong tömegközéppontjára vonatkoztatott impulzusnyomatéka az 5 m út befutása után? **(0,0626 kg · m²/s)**



a) Az erőket bontsuk fel a lejtőre merőleges és vele párhuzamos komponensekre. A szokásos 3 egyenlet megadja K kötél, S súrlódási, és T tartóerőt.

$$\begin{aligned} K \sin \alpha + mg \cos \alpha &= T \\ mg \sin \alpha &= K \cos \alpha + S \\ S r &= K r. \end{aligned}$$

Adódik: $K = S = mg \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

b) A meg nem csúszás feltétele: $S \leq \mu T$.

c)

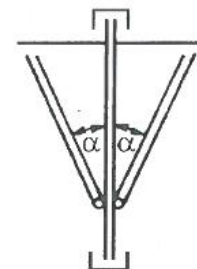
$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - S &= ma \\ S r &= \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \beta \\ a &= r \beta, \end{aligned}$$

majd a gyorsulásból számoljuk atz időt.

d) $N = \theta \omega$.

.41) A függőleges tengelyhez alsó végükön csuklósan rögzített $l = 0,4$ m hosszú rudak a tengellyel 30° -os szöget zárnak be az ábra szerint, miközben” állandó szögsebességgel egyenletesen forog a függőleges tengely körül. A felső rúdvégek kerületi sebessége 10 m/s.

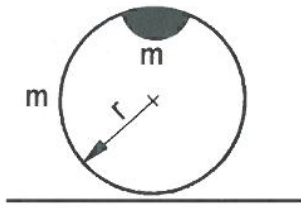
- a) Hányad részére csökken a rúdvégeknek a függőleges tengely körüli forgásból adódó kerületi sebessége, ha a rudak felső végét rögzítő fonalakat elégetjük, és kivárjuk, amíg a rudak vízszintes helyzetbe jutnak? **(2,5 m/s)**
- b) Mekkora lesz a rúdvégek sebességének nagysága, a rudak vízszintes helyzetében? **(5,95 m/s)**



a) A függőleges tengely körüli perdület megmarad, mert a nehézségi és a tengelyt tartó erőknek nincsen forgatónyomatéka a függőleges tengelyre. De közben megnő a tehetetlenségi nyomaték (4-szersére, ui. a rúd minden pontja dupla akkora távolságra ($\sin 30^\circ = 1/2$) kerül a tengelytől, mint kezdetben volt). Így a szögsebesség csökken negyedére. A rúdvégek sebességei szintén.

.b) Disszipatív erők hiányában a rendszer összes mechanikai energiája állandó. A függőleges tengely körüli forgási energia háromnegyede és a helyzeti energia csökkenés a rudak függőleges síkban történő mozgásához tartozó forgási energiává alakulnak.

A rúdvégek vízszintes (2,5 m/s) és függőleges (5,40 m/s) sebességkomponensei összeadandók.



.42)** $r = 1$ m sugarú, $m = 5$ kg tömegű abroncs kerületére ugyancsak $m = 5$ kg tömegű nehezéket erősítettünk. Az abroncsot vízszintes síkra helyezük. A súrlódás elhanyagolható. Kezdhelyzetben a nehezék legfelül van. Ekkor az abroncsot elengedjük.

.a) Mekkora az abroncs tömegközéppontjának a gyorsulása, amikor a nehezék a középponttal egyező magasságban van? (**5 m/s² vízszintesen a kicsi tömeg felé**)

.b) Mekkora erővel nyomja ekkor az abroncs a talajt? (**75 N**)

.c) Oldjuk meg a feladatot úgy, hogy az *abroncs tömege* M , a *kicsi testé* m , és a *talaj súrlódásmentes*! Ezután ellenőrizzük, hogy $m=M$ az eredmények visszaadják-e az előző pontok eredményeit!

[a középpont gyorsulása vízszintesen $\frac{2m^2}{(m+M)^2}g$, $T = \frac{M(2m+M)}{m+M}g$]

.d) Oldjuk meg a feladatot úgy, hogy mindkét tömeg m , de a talaj súrlódásos, viszont az abroncs nem csúszik meg! Mekkora lesz a véghelyzetben a középpont gyorsulása, mekkora a tartóerő, és legalább mekkora tapadási súrlódási együttható szükséges a folyamathoz? ($\frac{1}{2}g$; $\frac{7}{4}mg$; $\frac{2}{7}$)

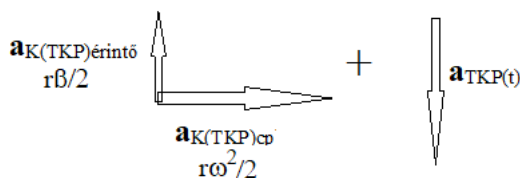
.a) A súrlódási erő hiánya miatt a rendszer vízszintesen zárt, a TKP vízszintesen nem mozdul, így a véghelyzetben sem az abroncs középpontjának, sem a kis tömegnek nincs vízszintes sebessége.

A véghelyzetben a sebességeket és a szögsebességet az *energiamegmaradásból* számíthatjuk. A TKP függőlegesen lefelé mozog, és körülötte forog a rendszer, méghozzá azzal a kényszerfeltétellel, hogy az *abroncs középpontja függőlegesen (sem) mozog a talajhoz képest*.

(Más szemléltető ötlet: Az egész rendszer az abroncs (a véghelyzetben álló!) középpontja, mint pillanatnyi forgástengely körül tisztán forog.)

Mindkét gondolatból adódik, hogy $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$ és $v_{TKP} = \sqrt{gr}/2$.

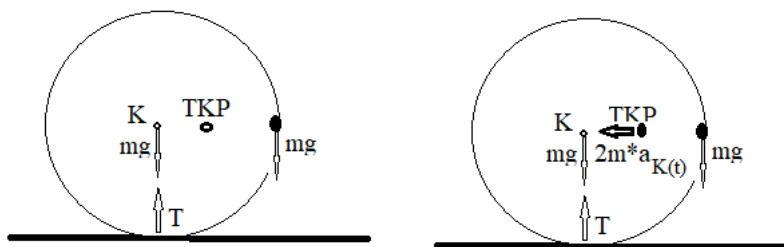
Az abroncs középpontjának (K) talajhoz képesti gyorsulása: $\mathbf{a}_{K(t)} = \mathbf{a}_{K(TKP)} + \mathbf{a}_{TKP(t)} =$
 $= (\mathbf{a}_{K(TKP)érintő} + \mathbf{a}_{K(TKP)cp}) + \mathbf{a}_{TKP(t)}$ az ábra szerint.



Mivel az *abroncs nem emelkedik fel a talajról*, ezért a talajhoz képesti függőleges gyorsulása **0** az említett helyzetben. Teljes gyorsulása csakis a körmozgásból származó centripetális gyorsulás: $a_{K(TKP)cp} = r/2 \cdot \omega^2 = g/2$. Továbbá $a_{TKP(t)} = r/2 \cdot \beta$. (Ez utóbbit a következő kérdésnél használjuk fel.)

.b) Egyenletrendszer írunk fel a vizsgált helyzetben az ábra jelöléseivel:

- Mozgásegyenlet: $2mg - T = 2ma_{TKP}$
- Forgó mozgás alapegyenlete a TKP-n átmenő(!) tengelyre: $T \frac{r}{2} + 0 + 0 = \theta_{TKP} \beta$



(A K ponton átmenő tengelyre is felírható lenne a forgó mozgás egyenlete, de ekkor a K pont talajhoz képesti gyorsulása miatti tehetetlenségi erőt fel kell venni a tömegközéppontba. Ezen erő most vízszintes, hatásvonala átmegy K ponton, tehát forgatónyomatéka K-n átmenő tengelyre nem lesz, így $mgr = \theta_K \beta$ adódik.)

- És a kényszer, miszerint K a talajhoz képest függőlegesen nem gyorsul: $a_{TKP} = \beta r/2$.

Adódik : $\beta = g/(2r)$ $a_{TKP} = g/4$, $T = 3mg/2$,

.c) A TKP helye másutt van és vízszintesen nem mozdul.

Az **energiamegmaradásból** és abból a kényszerből hogy az **abroncsközep** **függőleges sebessége 0**: $\omega = \sqrt{\frac{2m}{m+M} \frac{g}{r}}$

Az abroncs meg nem emelkedése miatt a középpontjának gyorsulása csak vízszintes lehet, a középpont gyorsulása vízszintesen $a_{cp} = \frac{2m^2}{(m+M)^2} g$, miközben a TKP gyorsulása függőlegesen lefelé: $a_{TKP} = \left(\frac{m}{m+M}\right) \beta$, amit a következő kérdésben kényszerfeltételként használunk.

A **dinamikai egyenletekből** adódik a tartóerő (T , a_{TKP} , β):

$$2(m+M)g - T = 2(m+M)a_{TKP}$$

$$T\left(\frac{m}{m+M}\right)r + mg\left(\frac{M}{m+M}\right)r - Mg\left(\frac{m}{m+M}\right)r = \theta_{TKP}\beta, \text{ ahol } \theta_{TKP} = \frac{M(M+2m)}{m+M}r^2, \text{ és a kényszer:}$$

$$a_{TKP} - \left(\frac{m}{m+M}\right)\beta = 0.$$

$$\text{Az eredmény: } T = \frac{M(2m+M)}{m+M}g, \quad \beta = \frac{m}{m+M}\frac{g}{r}, \quad a_{TKP} = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 g$$

.d) A súrlódási erő miatt a rendszer **vízszintesen sem zárt**, a folyamat során a TKP elmozdul, vízszintes sebessége és gyorsulása is lesz. Az abroncs középpontjának sebessége sem lesz 0.

Az **energiamegmaradás** érvényes marad, mert nincs csúszási súrlódás (a tapadási súrlódás összes munkavégzése a gyorsítást és forgatást is figyelembe véve 0):

$$mgr = \frac{1}{2}(2m)(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}\theta_{TKP}\omega^2, \text{ ahol a Steiner-tétel és az additívitás}$$

$$\text{miatt } \theta_{TKP} = \left(mr^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2\right) + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Ehhez járul két egyenlet, kifejezve azt, hogy a meg nem csúszás miatt az abroncs talajjal érintkező pontjának a talajhoz képest nincs sem vízszintes, sem függőleges sebessége, azaz $v_1 = d\omega \sin \alpha$ és $v_2 = d\omega \cos \alpha$, ahol $d = \frac{\sqrt{5}}{2}r$ és $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. **Tehát a két kényszer: $v_1 = \frac{r}{2}\omega$ és $v_2 = r\omega$.**

(Az első kényszer abból is kijönne, hogy az abroncsközep függőleges sebessége nulla: $v_1 - \frac{r}{2}\omega = 0$)

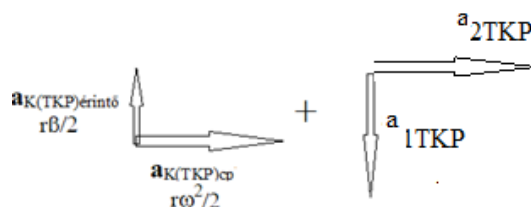
$$\text{Az egyenletrendszer megoldása: } \omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{gr}{8}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{gr}{2}}.$$

Gyorsulások:

- $a_{K(TKP)cp} = \frac{r\omega^2}{2} = \frac{g}{4}$, így az abroncsközep vízszintes gyorsulása a talajhoz: $a_{K(talaj)} = a_2 + \frac{g}{4}$.

- Függőlegesen nem gyorsul az abroncsközep: $a_1 - \frac{r}{2}\beta = 0$.

- A talajon lévő pont a talajjal párhuzamosan nem gyorsul:



$$a_2 - d\beta \cos\alpha = 0, \text{ azaz } a_2 = r\beta.$$

A dinamika egyenletei tehát (S , T , a_1 , a_2 , β):

$$2mg - T = 2ma_1$$

$$S = 2ma_2$$

$$T \frac{r}{2} - Sr = \theta_{TKP} \beta$$

$$a_1 - \frac{r}{2} \beta = 0 \quad \text{kényszer, az abroncsközéppont függőlegesen nem gyorsul,}$$

$$a_2 = r\beta \quad \text{kényszer, a talajon lévő pont talajjal párhuzamosan nem gyorsul.}$$

$$\text{A megoldása: } \beta = \frac{g}{4r} \quad a_1 = \frac{g}{8} \text{ lefelé} \quad a_2 = \frac{g}{4} \text{ vízszintesen} \quad S = \frac{mg}{2}, \quad T = \frac{7}{4} mg.$$

$$\text{Így az abroncsközéppont a talajhoz képest } a_{K(\text{talaj})} = a_2 + \frac{g}{4} = \frac{g}{2}.$$

A meg nem csúszás $S \leq \mu_o T$ feltételéből adódik a minimális $\frac{2}{7} \leq \mu_o$.

.43) A forgózsámoly fordulatszáma $5 \frac{1}{s}$ -ről $2 \frac{1}{s}$ -ra csökkent, mert egy 2 kg tömegű 30 cm átmérőjű, tömör nyugvó korongot helyeztünk rá.

a.) Mennyi a zsámoly tehetetlenségi nyomatéka? (**0,015 kgm²**)

b.) Mennyivel változott a rendszer összes forgási energiája, és mi a magyarázat ennek? (**-0,1125 J**)

a.) A perdület ($\theta\omega$) megmarad, mert a függőleges forgástengelyre nincsen forgatónyomatéka a nehézségi és a tengelyt tartó erőknek.

b.) $E_{\text{forgási}} = \frac{1}{2} \theta \omega^2 = \frac{1}{2} (\theta \omega) \omega$. Az álló korongot felgyorsító csúszási súrlódási erő az elvett mechanikai energiát belső energiává változtatta.

.44) $R = 0,2 \text{ m}$ sugarú tömör hengert tengelyének végpontjaiban tűcsapágnak tartanak. A henger palástján levő csavarvonalú pályán súrlódásmentesen lecsúszik egy test, amelynek tömege a henger tömegének ötöde. A csavarvonal menetmagassága $h = 0,2 \text{ m}$.

a.) Mekkora lesz a test sebessége az indulástól számított 0,2 m-es szintkülönbség megtétele után?

(**1,69 m/s**)

b.) Mennyi idő alatt éri el a test ezt a sebességet? (**2,49 s**)

a.) A henger ω szögsebességgel, a kicsi test vízszintes síkban fekvő v_x , és függőleges v_y sebességgel fog rendelkezni a végén.

Megmarad a perdület (zárt rendszer):

$$0 = \frac{1}{2} (5mR^2) \omega - (mv_x) R$$

$$\text{és a mechanikai energia (nincs csúszási súrlódás):} \quad mgh = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (5mR^2) \right] \omega^2 + \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2)$$

Három ismeretlenünkhöz kell még egy egyenlet. Ez azt a kényszert fejezi ki, hogy a golyó a henger menete mentén gurul, azaz a golyó palásthöz viszonyított sebessége akkora szöggel hajlik a vízszintes alá, amekkora menet (palástra csavart lejtő) hajlásszöge.

$$\text{Mivel } \mathbf{v}_{g(\text{palást})} = \mathbf{v}_{g(IR)} + \mathbf{v}_{IR(\text{palást})} = \mathbf{v}_{g(IR)} - \mathbf{v}_{\text{palást}(IR)} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y - R\omega,$$

$$\text{ezért a hasonló háromszögekből } \frac{h}{2R\pi} = \frac{v_y}{v_x - R\omega} \text{ a kényszerfeltétel.}$$

A megoldás: $\omega = 3,37 \text{ 1/s}$, $v_x = 1,685 \text{ m/s}$, $v_y = 0,161 \text{ m/s}$.

b.) A mozgás egyenletesen változó, $h = \frac{v_y}{2} t$.

